

**А.С. Рылов,
А.А. Сапожников**

Домашняя работа по алгебре и началам анализа за 11 класс

**к учебнику «Алгебра и начала анализа: Учеб.
для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений /
А.Н. Колмогоров, А.М. Абрамов, Ю.П. Дудницин и
др.;
Под ред. А.Н. Колмогорова, — 12-е изд. —
М.: Просвещение, 2002 г.»**

ГЛАВА III. ПЕРВООБРАЗНАЯ И ИНТЕГРАЛ

§ 7. Первообразная

26. Определение первообразной

326. а) $F(x) = x^5$ – первообразная для $f(x) = 5x^4$ на \mathbb{R} ;

б) $F(x) = x^{-3}$ – первообразная для $f(x) = -3x^{-4}$ на $(0; \infty)$;

в) $F(x) = \frac{1}{7}x^7$ – первообразная для $f(x) = x^6$ на \mathbb{R} ;

г) $F(x) = -\frac{1}{6}x^{-6}$ – первообразная для $f(x) = x^{-7}$ на $(0; \infty)$.

327. а) $F'(x) = -\cos x \neq \cos x$, $F(x) = 3 - \sin x$ на \mathbb{R} ;

б) $F'(x) = (5 - x^4)' = -4x^3$ для любого $x \in \mathbb{R}$, таким образом $F(x) = 5 - x^4$ является первообразной для $f(x) = -4x^3$ на \mathbb{R} ;

в) $F'(x) = (\cos x - 4)' = -\sin x$ для любого $x \in \mathbb{R}$, таким образом $F(x) = \cos x - 4$ является первообразной для $f(x) = -\sin x$ на \mathbb{R} ;

г) $F'(x) = (x^{-2} + 2)' = -\frac{2}{x^3}$ для любого $x \in (0; \infty)$, таким образом

$F(x) = x^2 + 2$ не является первообразной для $f(x) = \frac{1}{2x^3}$ на $(0; \infty)$.

328. а) $F(x) = 3,5x + 10$, т.к. $F'(x) = f(x)$ для любого $x \in \mathbb{R}$;

б) $F(x) = \sin x + 3$, т.к. $F'(x) = f(x)$ для любого $x \in \mathbb{R}$;

в) $F(x) = x^2 + 2$, т.к. $F'(x) = f(x)$ для любого $x \in \mathbb{R}$;

г) $F(x) = 8$, т.к. $F'(x) = f(x)$ для любого $x \in \mathbb{R}$.

329. а) $F(x) = \cos x + 4$, т.к. $F'(x) = f(x)$ для любого $x \in \mathbb{R}$;

б) $F(x) = 3 - \frac{1}{2}x^2$, т.к. $F'(x) = f(x)$ для любого $x \in \mathbb{R}$;

в) $F(x) = 4(5 - x)$, т.к. $F'(x) = f(x)$ для любого $x \in \mathbb{R}$;

г) $F(x) = 1 - \sin x$, т.к. $F'(x) = f(x)$ для любого $x \in \mathbb{R}$.

330. а) $F'(x) = (\sin^2 x)' = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$ для любого $x \in \mathbb{R}$,

б) $F'(x) = \frac{1}{2}(\cos 2x)' = \frac{1}{2}(-2)\sin 2x = -\sin 2x$ для любого $x \in \mathbb{R}$,

в) $F'(x) = (\sin 3x)' = 3 \cos 3x$ для любого $x \in \mathbb{R}$;

г) $F'(x) = \left(3 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)' = \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}}$ для любого $x \in (-\pi; \pi)$.

331. а) $F'(x) = \left(2x + \cos \frac{x}{2}\right)' = 2 - \frac{1}{2} \sin \frac{x}{2} = f(x)$ для любого $x \in \mathbb{R}$;

$$\text{б) } F'(x) = \left(\sqrt{4-x^2} \right)' = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = f(x) \text{ для любого } x \in (-2; 2);$$

$$\text{в) } F'(x) = \left(\frac{1}{x^2} \right)' = -\frac{2}{x^3} \text{ для любого } x \in (0; \infty);$$

$$\text{г) } F'(x) = 4 \left(x\sqrt{x} \right)' = 4 \left(x^{\frac{3}{2}} \right)' = 4 \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = 6\sqrt{x} = f(x) \text{ для любого } x \in (0; \infty).$$

$$\mathbf{332. \text{ а) } } F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 8, \text{ т.к. } F'(x) = f(x) \text{ для любого } x \in \mathbb{R};$$

$$\text{б) } F(x) = x + \cos x + 2, \text{ т.к. } f(x) = \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right)^2 = 1 - \sin x \text{ на } \mathbb{R} \text{ и}$$

$$F'(x) = 1 - \sin x \text{ для любого } x \in \mathbb{R};$$

$$\text{в) } F(x) = x - 12, \text{ т.к. } f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \text{ на } \mathbb{R} \text{ и } F'(x) = f(x) \text{ для любого } x \in \mathbb{R};$$

$$\text{г) } F(x) = x^3 + x = 5, \text{ т.к. } F'(x) = f(x) \text{ для любого } x \in \mathbb{R}.$$

$$\mathbf{333. \text{ а) } } F_1(x) = x^2 + 7 \text{ и } F_2(x) = x^2 + 13 - \text{ первообразные для } f(x) = 2x \text{ на } \mathbb{R};$$

$$\text{б) } F_1(x) = x + \cos x + 12 \text{ и } F_2(x) = x + \cos x - 1 - \text{ первообразные для } f(x) = 1 - \sin x \text{ на } \mathbb{R};$$

$$\text{в) } F_1(x) = \frac{1}{3}x^3 + 3 \text{ и } F_2(x) = \frac{1}{3}x^3 + 4 - \text{ первообразные для } f(x) = x^2 \text{ на } \mathbb{R};$$

$$\text{г) } F_1(x) = \sin x + 2x + 2 \text{ и } F_2(x) = \sin x + 2x - 7 - \text{ первообразные для } f(x) = \cos x + 2 \text{ на } \mathbb{R}.$$

$$\mathbf{334. \text{ а) } } g(x) = -\frac{1}{x} - \text{ первообразная для } f(x) = \frac{1}{x^2} \text{ на } (-\infty; 0) \cup (0; \infty),$$

$$f'(x) = -\frac{2}{x^3} = h(x);$$

$$\text{б) } f(x) = \frac{x^2}{2} - \cos x - \text{ первообразная для } h(x) = x + \sin x \text{ на } \mathbb{R},$$

$$h'(x) = 1 + \cos x = g(x);$$

$$\text{в) } h(x) = \frac{x^2}{2} + 2x - \text{ первообразная для } g(x) = x + 2 \text{ на } \mathbb{R}, g'(x) = 1 = f(x);$$

$$\text{г) } g(x) = 3x + 2\cos x - \text{ первообразная для } f(x) = 3 - 2\sin x \text{ на } \mathbb{R},$$

$$f'(x) = -2\cos x = h(x).$$

27. Основное свойство первообразной

- 335.** а) $f(x) = 2 - x^4$; б) $f(x) = x + \cos x$;
 $F(x) = 2x - \frac{1}{5}x^5 + C$; $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + \sin x + C$;
 в) $f(x) = 4x$; $F(x) = 2x^2 + C$; г) $f(x) = -3$; $F(x) = -3x + C$.
- 336.** а) $f(x) = x^6$; $F(x) = \frac{1}{7}x^7 + C$; б) $f(x) = \frac{1}{x^3} - 2$; $F(x) = -\frac{1}{2x^2} - 2x + C$;
 в) $f(x) = 1 - \frac{1}{x^4}$; $F(x) = x + \frac{1}{3x^3} + C$; г) $f(x) = x^5$; $F(x) = \frac{1}{6}x^6 + C$.
- 337.** а) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $F(x) = -\frac{1}{x} + C$; $F\left(\frac{1}{2}\right) = -2 + C = -12$, $C = -10$;
 $F(x) = -\frac{1}{x} - 10$;
 б) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, $F(x) = \operatorname{tg} x + C$; $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + C = 0$, $C = -1$; $F(x) = \operatorname{tg} x - 1$;
 в) $f(x) = x^3$, $F(x) = \frac{x^4}{4} + C$; $F(-1) = \frac{1}{4} + C = 2$, $C = 1\frac{3}{4}$; $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + 1\frac{3}{4}$;
 г) $f(x) = \sin x$, $F(x) = -\cos x + C$; $F(-\pi) = 1 + C$, $C = -2$;
 $F(x) = -\cos x - 2$ – первообразная для $f(x) = \sin x$; $F(-\pi) = -1$.
- 338.** а) $F'(x) = (\sin x)' - (x \cos x)' = \cos x - \cos x + x \sin x = f(x)$;
 $F(x) = \sin x - x \cos x + C$ – общая первообразная;
 б) $F'(x) = \left(\sqrt{x^2 + 1}\right)' = \frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot (x^2)' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = f(x)$;
 $F(x) = \sqrt{x^2 + 1} + C$ – общая первообразная;
 в) $F'(x) = (\cos x)' + (x \sin x)' = -\sin x + \sin x + x \cos x = x \cos x = f(x)$;
 $F(x) = \cos x + x \sin x + C$ – общая первообразная;
 г) $F'(x) = x' - \left(\frac{1}{x}\right)' = 1 + \frac{1}{x^2} = \frac{1 + x^2}{x^2} = f(x)$;
 $F(x) = x - \frac{1}{x} + C$ – общая первообразная.
- 339.** а) $f(x) = 2 \cos x$, $F(x) = 2 \sin x + C$; $F\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -2 + C = 1$, $C = 3$;
 $F(x) = 2 \sin x + 3$ – искомая первообразная;
 б) $f(x) = 1 - x^2$, $F(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + C$; $F(-3) = -3 + 9 + C = 6 + C = 9$, $C = 3$;
 $F(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + 3$ – искомая первообразная;

$$\text{в) } f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right), F(x) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + C; F\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\cos\pi + C = 1 + C = -1, C = -2;$$

$$F(x) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 2 - \text{искомая первообразная};$$

$$\text{г) } f(x) = \frac{1}{x^4}, F(x) = -\frac{1}{3x^3} + C; F\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{8}{3} + C = 3, C = 5\frac{2}{3};$$

$$F(x) = -\frac{1}{3x^3} + 5\frac{2}{3} - \text{искомая первообразная}.$$

340. а) $f(x) = 2 - \sin x$, $F_1(x) = 2x + \cos x$ и $F_2(x) = 2x + \cos x + C$;
 $F_2(x) - F_1(x) = C = 4$; $F_1(x) = 2x + \cos x$ и $F_2(x) = 2x + \cos x + 4$ – две
 искомые первообразные;

$$\text{б) } f(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, F_1(x) = \operatorname{tg} x + C \text{ и } F_2(x) = \operatorname{tg} x; F_1(x) - F_2(x) = C = 1;$$

$$F_1(x) = \operatorname{tg} x + 1 \text{ и } F_2 = \operatorname{tg} x - \text{две искомые первообразные};$$

$$\text{в) } f(x) = \sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2} = -\cos x, F_1(x) = -\sin x \text{ и } F_2(x) = -\sin x + C;$$

$$F_2(x) - F_1(x) = C = \frac{1}{2};$$

$$F_1(x) = -\sin x \text{ и } F_2(x) = -\sin x + 0,5 - \text{две искомые первообразные};$$

$$\text{г) } f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, F_1(x) = 2\sqrt{x} \text{ и } F_2(x) = 2\sqrt{x} + C; F_2(x) - F_1(x) = C = 2;$$

$$F_1(x) = 2\sqrt{x} \text{ и } F_2(x) = 2\sqrt{x} + 2 - \text{две искомые первообразные}.$$

$$\textbf{341. а) } a(t) = -2t, v(t) = -t^2 + C_1, x(t) = -\frac{t^3}{3} + C_1 t + C_2;$$

$$v(1) = -1 + C_1 = 2, C_1 = 3; x(t) = -\frac{t^3}{3} + 3t + C_2,$$

$$x(1) = -\frac{1}{3} + 3 + C_2 = 4, C_2 = 1\frac{1}{3}; x(t) = -\frac{t^3}{3} + 3t + \frac{4}{3};$$

$$\text{б) } a(t) = \sin t, v(t) = -\cos t + C_1, x(t) = -\sin t + C_1 t + C_2; v\left(\frac{\pi}{2}\right)' = C_1 = 1;$$

$$x(t) = -\sin t + t + C_2, x\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 + \frac{\pi}{2} + C_2 = 2, C_2 = 3 - \frac{\pi}{2}; x(t) = -\sin t + t + 3 - \frac{\pi}{2};$$

$$\text{в) } a(t) = 6t, v(t) = 3t^2 + C_1, x(t) = t^3 + C_1 t + C_2; v(0) = C_1 = 1;$$

$$x(t) = t^3 + t + C_2, x(0) = C_2 = 3; x(t) = t^3 + t + 3;$$

$$\text{г) } a(t) = \cos t, v(t) = \sin t + C_1, x(t) = -\cos t + C_1 t + C_2; v(\pi) = C_1 = 0;$$

$$x(t) = -\cos t + C_2, x(\pi) = 1 + C_2 = 1, C_2 = 0; x(t) = -\cos t.$$

28. Три правила нахождения первообразных

342. а) $f(x) = 2 - x^3 + \frac{1}{x^3}$; поэтому

$$F(x) = 2x - \frac{x^4}{4} - \frac{1}{2x^2} + C - \text{общий вид первообразных для } f(x);$$

б) $f(x) = x - \frac{2}{x^5} + \cos x$;

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x^4} + \sin x + C - \text{общий вид первообразных для } f(x);$$

в) $f(x) = \frac{1}{x^2} - \sin x$;

$$F(x) = -\frac{1}{x} + \cos x + C - \text{общий вид первообразных для } f(x);$$

г) $f(x) = 5x^2 - 1$;

$$F(x) = \frac{5}{3}x^3 - x + C - \text{общий вид первообразных для } f(x).$$

343. а) $f(x) = (2x - 3)^5$; $F(x) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} (2x - 3)^6 + C = \frac{1}{12} (2x - 3)^6 + C - \text{общий вид первообразных для } f(x);$

б) $f(x) = 3\sin 2x$; $F(x) = \frac{1}{2} \cdot (-3) \cdot \cos 2x + C = -1,5\cos 2x + C - \text{общий вид первообразных для } f(x);$

в) $f(x) = (4 - 5x)^7$; $F(x) = -\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{8} (4 - 5x)^8 + C = -\frac{1}{40} (4 - 5x)^8 + C - \text{общий вид первообразных для } f(x);$

г) $f(x) = -\frac{1}{3} \cos\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$; $F(x) = -\frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \sin\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + C = -\sin\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + C - \text{общий вид первообразных для } f(x).$

344. а) $f(x) = \frac{3}{(4 - 15x)^4}$; $F(x) = -\frac{1}{15} \cdot \left(-\frac{1}{(4 - 15x)^3}\right) + C = \frac{1}{15(4 - 15x)^3} + C - \text{общий вид первообразных для } f(x);$

б) $f(x) = \frac{2}{\cos^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right)}$;

$$F(x) = -2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + C - \text{общий вид первообразных для } f(x);$$

в) $f(x) = \frac{4}{(3x-1)^2}$; $F(x) = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{4}{(3x-1)} \right) + C = -\frac{4}{3(3x-1)} + C$ – общий вид первообразных для $f(x)$;

г) $f(x) = -\frac{2}{x^5} + \frac{1}{\cos^2(3x-1)}$;

$F(x) = \frac{1}{2x^4} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}(3x-1) + C$ – общий вид первообразных для $f(x)$.

345. а) $f(x) = 4x + \frac{1}{x^2}$; $F(x) = 2x^2 - \frac{1}{x} + C$ – общая первообразная;

$F(-1) = 2 + 1 + C = 4$, $C = 1$; $F(x) = 2x^2 - \frac{1}{x} + 1$ – искомая первообразная;

б) $f(x) = x^3 + 2$; $F(x) = \frac{x^4}{4} + 2x + C$ – общая первообразная;

$F(2) = 4 + 4 + C = 15$, $C = 7$; $F(x) = \frac{x^4}{4} + 2x + 7$ – искомая первообразная;

в) $f(x) = 1 - 2x$; $F(x) = x - x^2 + C$ – общая первообразная;

$F(3) = 3 - 9 + C = 2$, $C = 8$; $F(x) = x - x^2 + 8$ – искомая первообразная;

г) $f(x) = \frac{1}{x^3} - 10x^4 + 3$; $F(x) = -\frac{1}{2x^2} - 2x^5 + 3x + C$ – общая первообразная;

$F(1) = -\frac{1}{2} - 2 + 3 + C = 5$; $C = 4\frac{1}{2}$;

$F(x) = -\frac{1}{2x^2} - 2x^5 + 3x + 4,5$ – искомая первообразная.

346. а) $f(x) = 1 - \cos 3x + 2\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$;

$F(x) = x - \frac{1}{3} \sin 3x + 2\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + C$ – общая первообразная;

б) $f(x) = \frac{1}{\sin^2 4x} + \frac{1}{\sqrt{2-x}} - 3x^2$;

$F(x) = -\frac{1}{4} \operatorname{ctg} 4x - 2\sqrt{2-x} - x^3 + C$ – общая первообразная;

в) $f(x) = \frac{2}{\cos^2(3x+1)} - 3\sin(4-x) + 2x$;

$F(x) = \frac{2}{3} \operatorname{tg}(3x+1) - 3\cos(4-x) + x^2 + C$ – общая первообразная;

г) $f(x) = \frac{1}{(3-2x)^3} + \frac{3}{\sqrt{5x-2}} - 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$;

$F(x) = \frac{1}{4(3-2x)^2} + \frac{6}{5}\sqrt{5x-2} + 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + C$ – общая первообразная.

347. а) $f(x) = 2x + 1$; $F(x) = x^2 + x + C$ – общая первообразная;
 $F(0) = 0$: $C = 0$; $F(x) = x^2 + x$ – искомая первообразная;
б) $f(x) = 3x^2 - 2x$; $F(x) = x^3 - x^2 + C$ – общая первообразная
 $F(1) = 4$: $1 - 1 + C = 4$, $C = 4$; $F(x) = x^3 - x^2 + 4$ – искомая первообразная;
в) $f(x) = x + 2$; $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + C$ – общая первообразная;
 $F(1) = 3$: $\frac{1}{2} + 2 + C = 3$, $C = \frac{1}{2}$; $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{1}{2}$ – искомая первообразная;
г) $f(x) = -x^2 + 3x$; $F(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + C$ – общая первообразная;
 $F(2) = -1$: $-\frac{8}{3} + 6 + C = -1$, $C = -4\frac{1}{3}$; $F(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 4\frac{1}{3}$ – искомая первообразная.

348. $v(t) = t^2 + 2t - 1$, т.к. $v(t) = x'(t)$, то
 $x(t) = \frac{t^3}{3} + t^2 - t + C$; $x(0) = 0$: $C = 0$; $x(t) = \frac{t^3}{3} + t^2 - t$ – искомая функция.

349. $v(t) = 2\cos \frac{t}{2}$; $x(t) = 4\sin \frac{t}{2} + C$;
 $x\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4$: $4\sin \frac{\pi}{6} + C = 4$, $2 + C = 4$, $C = 2$; $x(t) = 4\sin \frac{t}{2} + 2$.

350. $a(t) = 12t^2 + 4$; т.к. $a(t) = v'(t)$, то $v(t) = 4t^3 + 4t + C_1$;
 $v(1) = 10$: $4 + 4 + C_1 = 10$; $C_1 = 2$; $v(t) = 4t^3 + 4t + 2$; $x(t) = t^4 + 2t^2 + 2t + C_2$;
 $x(1) = 12$: $1 + 2 + 2 + C_2 = 12$, $C_2 = 7$; $x(t) = t^4 + 2t^2 + 2t + 7$ – искомая функция.

351. а) $F = ma$, т.о. $a(t) = \frac{F(t)}{m} = \frac{6-9t}{3} = 2-3t$; $v(t) = 2t - \frac{3}{2}t^2 + C_1$;
 $v(1) = 2 - \frac{3}{2} + C_1 = 4$; $C_1 = 3,5$; $x(t) = t^2 - \frac{t^3}{2} + 3,5t + C_2$; $x(1) = 1 - 0,5 + 3,5 + C_2 = -5$, $C_2 = -9$; $x(t) = t^2 - \frac{t^3}{2} + 3,5t - 9$ – искомая функция;
б) $F = ma$, т.о. $a(t) = \frac{F(t)}{m} = \frac{14\sin t}{7} = 2\sin t$; $v(t) = -2\cos t + C_1$;
 $V(\pi) = 2 + C_1 = 2$, $C_1 = 0$; $v(t) = -2\cos t$; $x(t) = -2\sin t + C_2$; $x(\pi) = C_2 = 3$;
 $x(t) = -2\sin t + 3$ – искомая функция;
в) $F = ma$, т.о. $a(t) = \frac{F(t)}{m} = \frac{25\cos t}{5} = 5\cos t$;
 $v(t) = 5\sin t + C_1$; $v\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5 + C_1 = 2$, $C_1 = -3$;

$$v(t) = 5\sin t - 3; x(t) = -5\cos t - 3t + C_2; x\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{3\pi}{2} + C_2 = 4, C_2 = 4 + \frac{3\pi}{2};$$

$$x(t) = -5\cos t - 3t + 4 + \frac{3\pi}{2} - \text{искомая функция};$$

$$\text{г) } F = ma, \text{ т.о. } a(t) = \frac{F(t)}{m} = \frac{8t+8}{4} = 2t+2;$$

$$v(t) = t^2 + 2t + C_1; v(2) = 4 + 4 + C_1 = 9, C_1 = 1;$$

$$v(t) = t^2 + 2t + 1 = (t+1)^2; x(t) = \frac{(t+1)^3}{3} + C_2; x(2) = 9 + C_2 = 7, C_2 = -2;$$

$$x(t) = \frac{(t+1)^3}{3} - 2 - \text{искомая функция}.$$

352. а) $f(x) = 3x^2 - 2x + 4$; $F(x) = x^3 - x^2 + 4x + C$ – общая первообразная
 $F_1(-1) = 1: -1 - 1 - 4 + C_1 = 1, C_1 = 7$;

$F_1(x) = x^3 - x^2 + 4x + 7$ – первая первообразная;

$F_2(0) = 3: C_2 = 3$; $F_2(x) = x^3 - x^2 + 4x + 3$ – вторая первообразная,

$F_1(x) - F_2(x) = 4$ – следовательно график $F_1(x)$ расположен выше графика $F_2(x)$;

б) $f(x) = 4x - 6x^2 + 1$; $F(x) = 2x^2 - 2x^3 + x + C$ – общая первообразная

$F_1(0) = 2: C_1 = 2$; $F_1(x) = 2x^2 - 2x^3 + x + 2$ – первая первообразная,

$F_2(1) = 3: 2 - 2 + 1 + C_2 = 3, C_2 = 2$;

$F_2(x) = 2x^2 - 2x^3 + x + 2$ – вторая первообразная т.к.

$F_2(x) - F_1(x) = 0$ – отсюда следует, что графики $F_1(x)$ и $F_2(x)$ совпадают;

в) $f(x) = 4x - x^3$; $F(x) = 2x^2 - \frac{x^4}{4} + C$ – общая первообразная;

$F_1(2) = 1: 2 \cdot 4 - 4 + C_1 = 1, C_1 = -3$; $F_1(x) = 2x^2 - \frac{x^4}{4} - 3$ – первая первообразная;

$F_2(-2) = 3: 2 \cdot 4 - 4 + C_2 = 3, C_2 = -1$;

$F_2(x) = 2x^2 - \frac{x^4}{4} - 1$ – вторая первообразная;

$F_1(x) - F_2(x) = -2$ – таким образом график $F_1(x)$ расположен ниже графика $F_2(x)$;

г) $f(x) = (2x+1)^2$; $F(x) = \frac{(2x+1)^3}{6} + C$ – общая первообразная;

$F_1(-3) = -1: -\frac{125}{6} + C_1 = -1, C_1 = 19\frac{5}{6}$;

$F_1(x) = \frac{(2x+1)^3}{6} + 19\frac{5}{6}$ – первая первообразная;

$$F_2(1) = 6 \frac{1}{3} : \frac{27}{6} + C_2 = 6 \frac{1}{3}, C_2 = 1 \frac{5}{6};$$

$$F_2(x) = \frac{(2x+1)^3}{6} + 1 \frac{5}{6} - \text{вторая первообразная};$$

$F_1(x) - F_2(x) = 18$ – отсюда следует, что график $F_1(x)$ расположен выше графика $F_2(x)$.

§ 8. Интеграл

29. Площадь криволинейной трапеции

$$353. \text{ а) } y(x) = x^2; Y(x) = \frac{x^3}{3}; S = Y(3) - Y(0) = \frac{3^3}{3} = 9;$$

$$\text{б) } y = \cos x; Y = \sin x; S = Y\left(\frac{\pi}{2}\right) - Y(0) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin 0 = 1;$$

$$\text{в) } y = \sin x; Y(x) = -\cos x; S = Y(\pi) - Y(0) = 1 + 1 = 2;$$

$$\text{г) } y(x) = -\frac{1}{x} - \text{первообразная для функции } y = \frac{1}{x^2};$$

$$S = y(2) - y(1) = -\frac{1}{2} - (-1) = \frac{1}{2}.$$

$$354. \text{ а) } Y(x) = \frac{x^4}{4} + x - \text{первообразная для функции } y = x^3 + 1;$$

$$S = Y(2) - Y(0) = \frac{2^4}{4} + 2 = 6;$$

$$\text{б) } Y(x) = x - 2\cos x - \text{первообразная для функции } y = 1 + 2\sin x;$$

$$S = Y\left(\frac{\pi}{2}\right) - Y(0) = \frac{\pi}{2} - 2\cos\frac{\pi}{2} + 2\cos 0 = \frac{\pi}{2} + 2;$$

$$\text{в) } Y(x) = 4x - \frac{x^3}{3} - \text{первообразная для функции } y = 4 - x^2;$$

$$y = 0 \text{ при } x = \pm 2, \text{ поэтому } S = Y(2) - Y(-2) = 2 \cdot \left(4 \cdot 2 - \frac{2^3}{3}\right) = 10 \frac{2}{3};$$

$$\text{г) } Y(x) = x + \frac{1}{2}\sin x - \text{первообразная для функции } y = 1 + \frac{1}{2}\cos x;$$

$$S = Y\left(\frac{\pi}{2}\right) - Y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right) = 1 + \pi.$$

$$355. \text{ а) } Y(x) = \frac{(x+2)^3}{3} - \text{первообразная для функции } y = (x+2)^2;$$

$$y=0 \text{ при } x=2; x=-2 \text{ при } y=4, \text{ поэтому } S=Y(0)-Y(-2)=\frac{2^3}{3}-\frac{8}{3}=2\frac{2}{3};$$

$$\text{б) } Y(x)=-\frac{1}{x+1}+x - \text{ первообразная для функции } y=\frac{1}{(x+1)^2}+1;$$

$$S=Y(2)-Y(0)=-\frac{1}{2+1}+2+1=2\frac{2}{3};$$

$$\text{в) } Y(x)=x^2-\frac{x^3}{3}- \text{ первообразная для функции } y=2x-x^2; \text{ функция}$$

$$y=0 \text{ при } x=0, x=2, \text{ поэтому } S=Y(2)-Y(0)=4-\frac{8}{3}=1\frac{1}{3};$$

$$\text{г) } Y(x)=-\frac{(x-1)^4}{4}- \text{ первообразная для функции } y=-(x-1)^3;$$

$$\text{ограничена на } [0;1] \rightarrow S=Y(1)-Y(0)=\frac{(-1)^4}{4}=\frac{1}{4}.$$

$$\mathbf{356.} \quad y=3\sin\left(x+\frac{3\pi}{4}\right); \text{ а) } Y(x)=-3\cos\left(x+\frac{3\pi}{4}\right);$$

$$S=Y\left(\frac{3\pi}{4}\right)-Y\left(-\frac{3\pi}{4}\right)=-3\cos\frac{3\pi}{4}+3\cos 0=3; y=2\cos 2x; \text{ б) } y(x)=\sin 2;$$

$$S=y\left(\frac{\pi}{4}\right)-y\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{2}-\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=2; y=\sin x-\frac{1}{2}; \text{ в) } y(x)=-\cos x-\frac{1}{2}x;$$

$$S=y\left(\frac{5\pi}{6}\right)-y\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{5\pi}{6}-\frac{5\pi}{12}+\cos\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}; y=1-\cos x;$$

$$\text{г) } y(x)=x-\sin x; S=y\left(\frac{\pi}{2}\right)-y\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi-2.$$

30. Формула Ньютона – Лейбница

357.

$$\text{а) } \int_{-1}^2 x^4 dx = \frac{x^5}{5} \Big|_{-1}^2 = \frac{32}{5} + \frac{1}{5} = \frac{33}{5} = 6\frac{3}{5}; \quad \text{б) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 =$$

$$=1-0=1;$$

$$\text{в) } \int_1^3 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_1^3 = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = \frac{80}{4} = 20;$$

$$\text{г) } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} 0 =$$

$$=1-0=1.$$

$$\mathbf{358.} \text{ а) } \int_1^2 \frac{dx}{(2x+1)^2} = -\frac{1}{2(2x+1)} \Big|_1^2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15};$$

$$\text{б)} \int_0^{\pi} 3 \cos \frac{x}{2} dx = 6 \sin \frac{x}{2} \Big|_0^{\pi} = 6 \sin \frac{\pi}{2} - 6 \sin 0 = 6 - 0 = 6;$$

$$\text{в)} \int_1^{10} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_1^{10} = -\frac{1}{10} + 1 = 0,9;$$

$$\text{г)} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2} \left(\cos \pi - \cos \frac{\pi}{2} \right) = \left(-\frac{1}{2} \right) (-1) = \frac{1}{2}.$$

$$\text{359. а)} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1; \int_0^1 dx = x \Big|_0^1 = 1; \text{т.к. } 1 = 1, \text{ то } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = \int_0^1 dx;$$

$$\text{б)} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = -\cos \frac{\pi}{3} + \cos 0 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2};$$

$$\int_{\frac{1}{16}}^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} \Big|_{\frac{1}{16}}^{\frac{1}{4}} = 2\sqrt{\frac{1}{4}} - 2\sqrt{\frac{1}{16}} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}; \text{т.к. } \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \text{ то } \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx = \int_{\frac{1}{16}}^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{\sqrt{x}};$$

$$\text{в)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1; \int_0^{\sqrt[3]{3}} x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^{\sqrt[3]{3}} = 1 - 0 = 1;$$

$$\text{т.к. } 1 = 1, \text{ то } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \int_0^{\sqrt[3]{3}} x^2 dx;$$

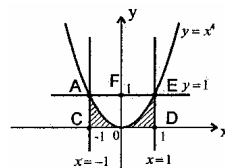
$$\text{г)} \int_0^1 (2x+1) dx = x^2 + x \Big|_0^1 = 2; \int_0^2 (x^3-1) dx = \frac{x^4}{4} - x \Big|_0^2 = 4 - 2 = 2; \text{ т.к. } 2 = 2, \text{ то}$$

$$\int_0^1 (2x+1) dx = \int_0^2 (x^3-1) dx.$$

$$\text{360. а)} S_{\text{ACODE}} = S_{\text{ACO}} + S_{\text{OED}} = 2S_{\text{OED}}$$

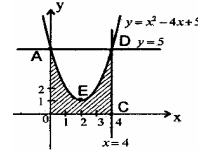
т.к. функция $y = x^4$ четная;

$$S_{\text{ACODE}} = 2 \int_0^1 x^4 dx = 2 \cdot \frac{x^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{2}{5};$$



$$\text{б)} S_{\text{AFEO}} = S_{\text{ACDE}} - S_{\text{ACOED}} = 2 - \frac{2}{5} = \frac{8}{5} = 1\frac{3}{5};$$

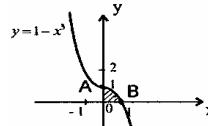
$$\text{B) } S_{\text{AOCDE}} = \int_0^4 (x^2 - 4x + 5) dx = \left. \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 5x \right|_0^4 = \frac{64}{3} - 32 + 20 = \frac{28}{3} = 9\frac{1}{3};$$



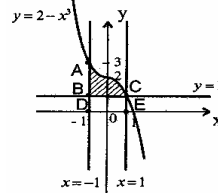
$$\text{Г) } S_{\text{AED}} = S_{\text{A OCD}} - S_{\text{AOCDE}} = 20 - 9\frac{1}{3} = \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3}.$$

361.

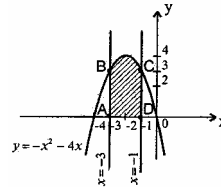
$$\text{a) } S_{\text{ABO}} = \int_0^1 (1 - x^3) dx = \left. x - \frac{x^4}{4} \right|_0^1 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4};$$



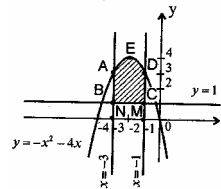
$$\begin{aligned} \text{б) } S_{\text{ABC}} &= S_{\text{ADE C}} - S_{\text{BDEC}} = 2 - \frac{1}{4} + 2 - \frac{1}{4} = 4 - 2 = \\ &= \int (2 - x^3) dx - 2 \cdot 1 = 2x - \frac{x^4}{4} \Big|_{-1}^1 - 2 = 2; \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{B) } S_{\text{ABCD}} &= \int_{-3}^{-1} (-x^2 - 4x) dx = \left. -\frac{x^3}{3} - 2x^2 \right|_{-3}^{-1} = \\ &= \left(\frac{1}{3} - 2 \right) + (-9 + 18) = 7\frac{1}{3}; \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{Г) } S_{\text{ABCDE}} &= S_{\text{ANMDE}} - S_{\text{BNMC}} = \\ &= \int_{-3}^{-1} (-x^2 - 4x) dx - 2 = 7\frac{1}{3} - 2 = 5\frac{1}{3}; \end{aligned}$$



$$\text{362. a) } \int_{-\pi}^{2\pi} \sin \frac{x}{3} dx = -3 \cos \frac{x}{3} \Big|_{-\pi}^{2\pi} = -3 \left(\cos \frac{2\pi}{3} - \cos \left(\frac{\pi}{3} \right) \right) = 6 \cos \frac{\pi}{3} = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3;$$

$$\text{б) } \int_{-2}^2 \frac{dx}{\sqrt{2x+5}} = \sqrt{2x+5} \Big|_{-2}^2 = \sqrt{9} - 1 = 2; \quad \text{B) } \int_0^{3\pi} \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{9}} = 9 \tan \frac{x}{9} \Big|_0^{3\pi} = 9 \tan \frac{\pi}{3} = 9\sqrt{3};$$

$$\text{Г) } \int_{-2}^6 \frac{dx}{\sqrt{x+3}} = 2\sqrt{x+3} \Big|_{-2}^6 = 2(\sqrt{9} - 1) = 4.$$

$$363. \text{ a) } \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \left(\sin \frac{x}{4} + \cos \frac{x}{4} \right)^2 dx = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \left(1 + \sin \frac{x}{2} \right) dx = \left(x - 2 \cos \frac{x}{2} \right) \Big|_0^{\frac{2\pi}{3}} =$$

$$= \left(\frac{2\pi}{3} - 2 \cos \frac{\pi}{3} \right) + 2 \cos 0 = \frac{2\pi}{3} - 1 + 2 = \frac{2\pi}{3} + 1;$$

$$\text{б) } \int_0^2 (1+2x)^3 dx = \frac{(1+2x)^4}{8} \Big|_0^2 = \frac{5^4}{8} - \frac{1}{8} = \frac{624}{8} = 78;$$

$$\text{в) } \int_0^{\frac{\pi}{12}} (1 + \cos 2x) dx = \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{12}} = \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12} + \frac{1}{4};$$

$$\text{г) } \int_1^4 \left(x + \frac{\sqrt{x}}{x} \right) dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2\sqrt{x} \right) \Big|_1^4 = \frac{16}{2} + 2\sqrt{4} - \frac{1}{2} - 2 = \frac{19}{2} = 9\frac{1}{2}.$$

364.

$$\text{a) } S_{AED} = S_{BECD} - S_{ABCD} =$$

$$= 1 \cdot 8 - \int_1^2 x^3 dx = 8 - \frac{x^4}{4} \Big|_1^2 = 8 - 3\frac{3}{4} = 4\frac{1}{4};$$

$$\text{б) } S_{AED} = S_{ABCDE} - S_{ABCD} =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} 2 \cos x dx - 1 \cdot \frac{2\pi}{3} = 2 \sin x \Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} - \frac{2\pi}{3} = 2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3};$$

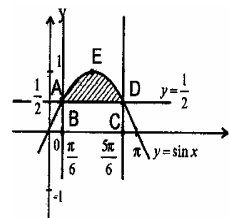
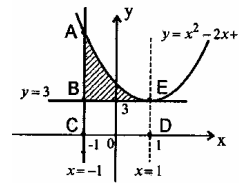
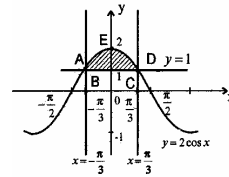
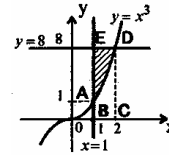
$$\text{в) } x^2 - 2x + 4 = 3, x^2 - 2x + 1 = 0, (x-1)^2 = 0, x=1;$$

$$S_{ABE} = S_{ACDE} - S_{BCDE} = \int_{-1}^1 (x^2 - 2x + 4) dx - 2 \cdot 3 =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 4x \right) \Big|_{-1}^1 - 6 = 8\frac{2}{3} - 6 = 2\frac{2}{3};$$

$$\text{г) } S_{ADE} = S_{ABCDE} - S_{ABCD} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \sin x dx - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} \right) =$$

$$= -\cos x \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} - \frac{\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}.$$



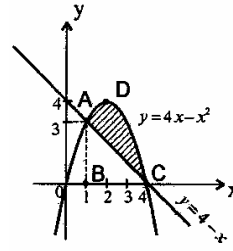
365.

a) $4x - x^2 = 4 - x$; $x^2 - 5x + 4 = 0$; $x = 4$; $x = 1$;

$S_{ADC} = S_{ABCD} - S_{ABC} =$

$$= \int_1^4 (4x - x^2) dx - \frac{3 \cdot 3}{2} = \left(2x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^4 - \frac{9}{2} =$$

$$= \left(32 - \frac{64}{3} \right) - \left(2 - \frac{1}{3} \right) - \frac{9}{2} = 9 - \frac{9}{2} = \frac{9}{2};$$

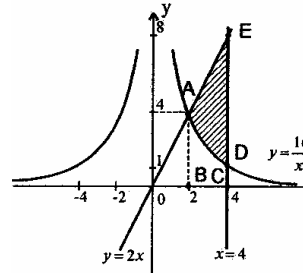


б) $\frac{16}{x^2} = 2x$; $x^3 = 8$; $x = 2$;

$S_{OADC} = S_{OAB} + S_{ABCD} = \frac{2 \cdot 4}{2} + \int_2^4 \frac{16 dx}{x^2} =$

$= 4 - \frac{16}{x} \Big|_2^4 = 4 - 4 + 8 = 8;$

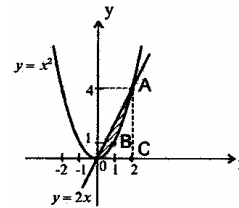
$S_{ADE} = S_{OEC} - S_{OADC} = \frac{4 \cdot 8}{2} - 8 = 8;$



в) $x^2 = 2x$ при $x = 0$; 2 .

$S_{OAB} = S_{OAC} - S_{OBAC} = \frac{2 \cdot 4}{2} - \int_0^2 x^2 dx =$

$= 4 - \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3} = 1 \frac{1}{3};$

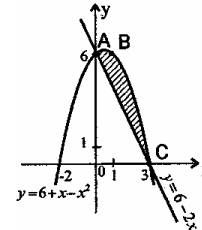


г) $6 + x - x^2 = 6 - 2x$;

$x^2 - 3x = 0$; $x = 0$; $x = 3$.

$S_{ABC} = S_{OABC} - S_{AOC} = \int_0^3 (6 + x - x^2) dx -$

$-\frac{3 \cdot 6}{2} = \left(6x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^3 - 9 = 18 + \frac{9}{2} - 9 - 9 = \frac{9}{2}.$



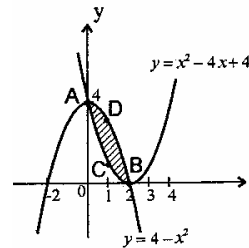
366.

a) $x^2 - 4x + 4 = 4 - x^2$;

$2x^2 - 4x = 0$; $x^2 - 2x = 0$; $x = 2$; $x = 0$;

$S_{ACBD} = S_{AOBD} - S_{AOBC} = \int_0^2 (4 - x^2) dx -$

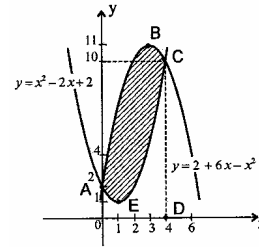
$-\int_0^2 (x^2 - 4x + 4) dx = \int_0^2 (4x - 2x^2) dx = \left(2x^2 - \frac{2x^3}{3} \right) \Big|_0^2 =$



$$= 8 - \frac{16}{3} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}.$$

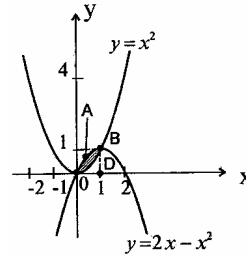
$$\text{б) } x^2 - 2x + 2 = 2 + 6x - x^2 \\ 2x^2 - 8x = 0; x^2 - 4x = 0; x = 0; x = 4.$$

$$S_{ABCE} = S_{OABCD} - S_{OAECD} = \\ = \int (8x - 2x^2) dx = \left(4x^2 - \frac{2x^3}{3} \right) \Big|_0^4 = \\ = 4 \cdot 16 - \frac{128}{3} = \frac{64}{3} = 21\frac{1}{3}.$$



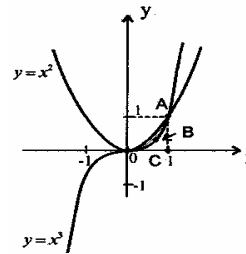
$$\text{в) } x^2 = 2x - x^2; x^2 - x = 0; x = 0; x = 1;$$

$$S_{OAB} = S_{OABD} - S_{OBD} = \\ = \int_0^1 (2x - x^2) dx = \left(x^2 - \frac{2x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$



$$\text{г) } x^2 = x^3; x^2(1 - x) = 0; x = 0; x = 1;$$

$$S_{OAB} = S_{OAC} - S_{OCAB} = \int_0^1 x^2 dx - \int_0^1 x^3 dx = \\ = \int_0^1 (x^2 - x^3) dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

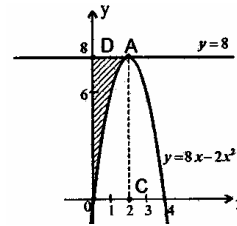


367.

$$y = 8x - 2x^2; x_B = \frac{-8}{-2} = 2; y_B = 16 - 8 = 8.$$

точка A(2;8); $y'(x) = 8 - 4x$, $y'(2) = 0$;
у_{кас} = $y(2) + y'(2)(x - 2) = 8$ – уравнение касательной;

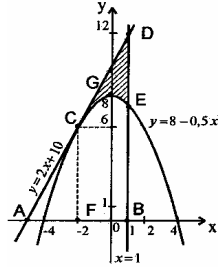
$$S_{ODA} = S_{ODAC} - S_{OAC} = 2 \cdot 8 - \int_0^2 (8x - 2x^2) dx = \\ = 16 - \left(4x^2 - \frac{2x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = 16 - 16 + \frac{2 \cdot 8}{3} = 5\frac{1}{3}.$$



368. $f(x) = 8 - 0,5x^2$; $f'(x) = -x$, $f'(-2) = 2$; $f(-2) = 6$;
 $y(x) = f(-2) + y'(-2)(x + 2) = 2x + 10$ – уравнение касательной; $y(1) = 2 \cdot 1 + 10 = 12$;

$$S_{CDE} = S_{FCDB} - S_{FCEB} = 3 \cdot 6 + \frac{3 \cdot 6}{2} - \int_{-2}^1 (8 - 0,5x^2) dx = 27 - \left(8x - \frac{0,5x^3}{3} \right) \Big|_{-2}^1 =$$

$$= 27 - \left(8 - \frac{1}{6} \right) + \left(-16 + \frac{8}{6} \right) = 28,5 - 24 = 4,5.$$



369. а) $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ и $\int_a^b g(x) dx = G(b) - G(a)$,

где $F(x)$ и $G(x)$ – первообразные на $[a; b]$ для $f(x)$ и $g(x)$ соответственно;

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = (F(x) + G(x)) \Big|_a^b = F(b) + G(b) - F(a) - G(a) =$$

$$= [F(b) - F(a)] + [G(b) - G(a)] = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx;$$

б) $k \int_a^b f(x) dx = k[F(b) - F(a)]$, где $F(x)$ – первообразная для $f(x)$ на $[a; b]$;

$$\int_a^b kf(x) dx = [kf(x)] \Big|_a^b = k[F(b) - F(a)] = k \int_a^b f(x) dx, \text{ где } k - \text{const.}$$

31. Применение интеграла

370. а) $V(x) = \pi \int_0^1 (x^2 + 1)^2 dx = \pi \int_0^1 (x^4 + 2x^2 + 1) dx = \pi \left(\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x \right) \Big|_0^1 =$

$$= \pi \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1 \right) = 1 \frac{13}{15} \pi;$$

б) $V(x) = \pi \int_1^4 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_1^4 = \pi \left(8 - \frac{1}{2} \right) = 7 \frac{1}{2} \pi;$

в) $V(x) = \pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2};$ г) $y = 1 - x^2 = 0; x^2 = 1; x = \pm 1;$

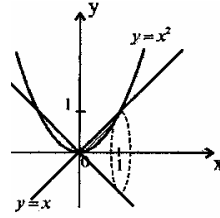
$$V(x) = \pi \int_{-1}^1 (1-x^2)^2 dx = \pi \int_{-1}^1 (1-2x^2+x^4) dx = \pi \left(x - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_{-1}^1 =$$

$$= 2\pi \cdot \frac{8}{15} = \frac{16\pi}{15} = 1 \frac{1}{15} \pi.$$

371. а) $V = V_{\text{конуса}} - V_0$, где

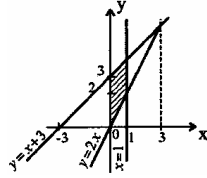
$$V_{\text{конуса}} = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi, \text{ т.к. } r = h = 1.$$

$$V_0 = \pi \int_0^1 x^4 dx = \pi \cdot \frac{x^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{1}{5} \pi; \quad V = \frac{1}{3} \pi - \frac{1}{5} \pi = \frac{2}{15} \pi;$$



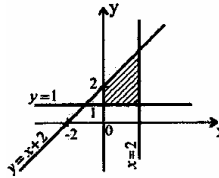
$$\text{б) } V = \pi \int_0^1 (x+3)^2 dx - \pi \int_0^1 (2x)^2 dx = \pi \int_0^1 (x^2 + 6x + 9) dx - \pi \int_0^1 4x^2 dx =$$

$$= \pi \int_0^1 (6x + 9 - 3x^2) dx = \pi (3x^2 + 9x - x^3) \Big|_0^1 = \pi (3 \cdot 1 + 9 - 1) = 11\pi;$$

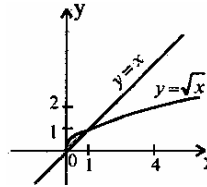


$$\text{в) } V = \pi \int_0^2 (x+2)^2 dx - \pi \int_0^2 dx = \pi \int_0^2 (x^2 + 4x + 4) dx - \pi x \Big|_0^2 =$$

$$= \pi \left(\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 4x \right) \Big|_0^2 - 2\pi = \pi \left(\frac{8}{3} + 8 + 8 \right) - 2\pi = 16 \frac{2}{3} \pi.$$

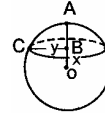


$$\text{г) } V = \pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2 dx - \pi \int_0^1 x^2 dx = \pi \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 - \pi \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}.$$



372.

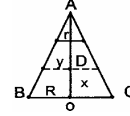
а) Пусть $|OB| = x$, тогда $S(x) = \pi y^2 = \pi(R^2 - x^2)$,
 $S(x)$ – площадь сечения шара, $x \in [R - H; R]$.



$$V = \int_{R-H}^R \pi(R^2 - x^2) dx = \pi R^2 x \Big|_{R-H}^R - \pi \frac{x^3}{3} \Big|_{R-H}^R = \pi R^2 H - \frac{\pi}{3} [R^3 - (R-H)^3] =$$

$$= \pi R^2 H - \frac{\pi}{3} [3HR^2 - 3RH^2 + H^3] = \pi RH^2 - \frac{\pi H^3}{3}.$$

б) Пусть $|OD| = x$, $S(x)$ – площадь сечения конуса,
 $x \in \left[0; \frac{HR - r}{R}\right]$.



$S(x) = \pi y^2 = \pi \frac{R^2}{H^2} (H - x)^2$. При этом x меняется в пределах

$$0 \leq x \leq \frac{H(R-r)}{R}.$$

$$\text{Т.о., } V = \int_0^{\frac{H(R-r)}{R}} \pi \frac{R^2}{H^2} (H - x)^2 dx = \int_0^{\frac{H(R-r)}{R}} \pi R^2 dx - \int_0^{\frac{H(R-r)}{R}} \frac{2\pi R^2}{H} \cdot x dx +$$

$$+ \int_0^{\frac{H(R-r)}{R}} \frac{\pi R^2}{H^2} \cdot x^2 dx = \pi RH(R-r) - \frac{\pi R^2}{H} x^2 \Big|_0^{\frac{H(R-r)}{R}} + \frac{\pi R^2}{H^2} \frac{x^3}{3} \Big|_0^{\frac{H(R-r)}{R}} =$$

$$= \frac{\pi H}{3} (R^2 + Rr + r^2).$$

373. $F = k \cdot x$, $k = \frac{F}{x}$; при $F = 2\text{Н}$, $x = 0,01\text{ м}$ $\cdot k = \frac{2}{0,01} = 200$;

$$A = \int_0^{0,04} 200x dx = 100x^2 \Big|_0^{0,04} = 0,16 \text{ Дж.}$$

374. $k = \frac{F}{x}$; при $F = 4\text{Н}$, $x = 0,08\text{ м}$ $\cdot k = \frac{4}{0,08} = 50$;

$$A = \int_0^{0,08} 50x dx = 25x^2 \Big|_0^{0,08} = 0,16 \text{ Дж.}$$

375. $F = -\frac{\gamma q}{r^2}$ (по закону Кулона). Т.к. работа равна $A = \int_a^b F(r) dr$, то

$$A = \int_a^b -\frac{\gamma q}{r^2} dr = \gamma q \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) = \gamma q \left(\frac{a-b}{ab} \right);$$

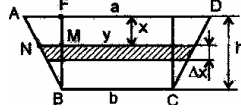
а) $a < b$, $q < 0$; $A = \gamma q \frac{(a-b)}{ab} = \frac{\gamma |q|}{ab} (b-a) > 0$;

б) $b < a, q > 0$: $A = \gamma q \frac{(a-b)}{ab} > 0$.

376. Выделим на расстоянии x от верхнего основания плотины полосу толщиной Δx . Тогда сила давления воды на эту полосу равна $\Delta P = \rho g x y \Delta x$. Т.к. $\triangle ABF$ подобен $\triangle NBM$, то

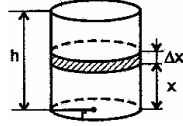
$$\frac{|AF|}{|NM|} = \frac{|FB|}{|MB|} \text{ или } \frac{a-b}{y-b} = \frac{h}{h-x}, y = b + (a-b) \left(1 - \frac{x}{h}\right),$$

$$\begin{aligned} \text{т.е. } P &= \int_0^h \rho g x \left(b + (a-b) \left(1 - \frac{x}{h}\right) \right) dx = \rho g \left[\frac{bx^2}{2} + \frac{(a-b)x^2}{2} - (a-b) \frac{x^3}{3h} \right]_0^h = \\ &= \rho g \left[\frac{h^2 a}{2} - \frac{h^2 a}{3} + \frac{h^2 b}{3} \right] = \frac{\rho g h^2 (a+2b)}{6}. \end{aligned}$$



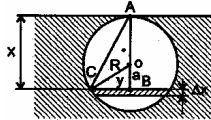
377. Пусть $\Delta x = \frac{h}{n}$ – толщина слоя воды, находящегося на расстоянии x от нижнего основания. Тогда работа, затрачиваемая на подъем этого слоя, равна $\Delta A = \rho g \Delta V \cdot x = \rho g \cdot \pi r^2 \Delta x \cdot x$. Полная работа равна

$$A = \sum_{i=1}^n \rho g \pi r^2 x_i \Delta x. \text{ Если } n \rightarrow \infty, \text{ то } A = \int_0^h \rho g \pi r^2 x dx = \rho g \pi r^2 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^h = \frac{\rho g \pi r^2 h^2}{2}.$$



378. Разобьем шар на n слоев толщиной $\Delta x = \frac{2R}{n}$ каждый. Выделим один из таких слоев, находящийся на расстоянии x от точки A. Тогда работа против сил выталкивания при погружении этого слоя на глубину x есть $\Delta A = \rho g \Delta V \cdot x$. Пусть $|OB| = a$, тогда $y^2 = R^2 - a^2 = R^2 - (x-R)^2$ и $\Delta V \approx \pi y^2 \Delta x = \pi [R^2 - (x-R)^2] \Delta x = \pi \cdot x(2R-x) \Delta x$, тогда

$$A = \int_0^{2R} \rho g \pi x^2 (2R-x) dx = \rho g \pi \left[\frac{2x^3 R}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^{2R} = \rho g \pi \left[\frac{2}{3} \cdot 8R^4 - \frac{16R^4}{4} \right] = \frac{3}{4} \rho g \pi R^4.$$

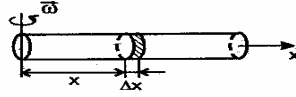


379. Разобьем стержень на n равных цилиндров, каждый из которых имеет высоту $\Delta x = \frac{l}{n}$.

$$\Delta E = \frac{mv^2}{2}, \text{ где } m = \rho \Delta V = \rho S \Delta x - \text{масса цилиндра, } v = \omega \cdot \left(\frac{x + \Delta x}{2} \right) -$$

средняя линейная скорость точек цилиндра. Так как $\frac{\Delta x}{x} \rightarrow 0$, то

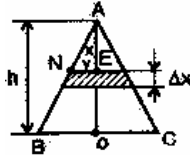
$$v \approx \omega x. \text{ Т.о. } \Delta E \approx \rho S \Delta x \cdot \frac{\omega^2 x^2}{2} \text{ и } E = \int_0^l \rho S dx \cdot \frac{\omega^2 x^2}{2} = \frac{\rho S \omega^2}{2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^l = \frac{\rho S \omega^2 l^3}{6}.$$



380. Центр масс кругового конуса лежит на его оси (OA), объем ΔV , находящийся на расстоянии x от вершины конуса, равен

$$\Delta V \approx \pi y^2 \cdot \Delta x. \Delta ABO \sim \Delta ANE; \frac{x}{h} = \frac{y}{r}, y = \frac{r}{h} \cdot x; \text{ тогда } \Delta V \approx \pi \frac{r^2}{h^2} x^2 \Delta x.$$

$$\text{Координата центра масс } x_c = \frac{\int_0^h \rho x dV}{\int_0^h \rho dV} = \frac{\rho \int_0^h \frac{\pi r^2}{h^2} x^3 dx}{\rho \int_0^h \frac{\pi r^2}{h^2} dx} = \frac{\int_0^h x^3 dx}{\int_0^h x^2 dx} = \frac{\frac{x^4}{4} \Big|_0^h}{\frac{x^3}{3} \Big|_0^h} = \frac{3}{4} h.$$



ГЛАВА IV. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ

§ 9. Обобщение понятия степени

32. Корень n -й степени и его свойства

381. а) $\sqrt[4]{16} = 2$, $2^4 = 16$ и $2 > 0$; б) $\sqrt[7]{-1} = -1$, $(-1)^7 = -1$;

в) $\sqrt[10]{1024} = 2$, $2^{10} = 1024$ и $2 > 0$; г) $\sqrt[5]{-243} = -3$, $(-3)^5 = -243$.

382. а) $\sqrt[17]{1} = 1$, $1^{17} = 1$; в) $\sqrt[3]{-343} = -7$, $(-7)^3 = -343$;

б) $\sqrt[6]{64} = 2$, $2^6 = 64$ и $2 > 0$; г) $\sqrt[19]{0} = 0$, $0^{19} = 0$.

383. а) $\sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{(-3)^3} = -3$; б) $\sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$;

в) $\sqrt[5]{-32} = \sqrt[5]{(-2)^5} = -2$; г) $\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4$.

384. а) $\sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \sqrt[5]{\left(\frac{1}{2}\right)^5} = \frac{1}{2}$; б) $\sqrt[4]{\frac{81}{625}} = \sqrt[4]{\left(\frac{3}{5}\right)^4} = \frac{3}{5}$;

в) $\sqrt[3]{-\frac{27}{8}} = \sqrt[3]{\left(-\frac{3}{2}\right)^3} = -\frac{3}{2}$; г) $\sqrt[4]{\frac{81}{256}} = \sqrt[4]{\left(\frac{3}{4}\right)^4} = \frac{3}{4}$.

385. а) $x^3 + 4 = 0$; $x = \sqrt[3]{-4} = -\sqrt[3]{4}$; б) $x^6 = 5$; $x = \pm \sqrt[6]{5}$;

в) $x^3 = 4$; $x = \sqrt[3]{4}$; г) $x^4 = 10$; $x = \pm \sqrt[4]{10}$.

386. а) $x^{10} - 15 = 0$; $x^{10} = 15$; $x = \pm \sqrt[10]{15}$;

б) $x^7 + 128 = 0$; $x^7 = -128$; $x = \sqrt[7]{-128} = -2$;

в) $x^6 - 64 = 0$; $x^6 = 64$; $x = \pm 2$; г) $x^5 = 3$; $x = \sqrt[5]{3}$.

387.

а) $16x^4 - 1 = 0$; $x^4 = \frac{1}{16}$;

б) $0,01x^3 + 10 = 0$; $x^3 = -1000$;
 $x = \sqrt[3]{-1000} = -10$;

$x = \pm \sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \pm \frac{1}{2}$;

в) $0,02x^6 - 1,28 = 0$; $x^6 = 64$;
 $x = \pm \sqrt[6]{64} = \pm 2$;

г) $12\frac{3}{4} - \frac{3}{4}x^2 = 0$; $x^2 = 17$;
 $x = \pm \sqrt{17}$.

388.

а) $\sqrt[3]{x} = -0,6$; $(\sqrt[3]{x})^3 = (-0,6)^3$;
 $x = -0,216$;

б) $\sqrt[4]{x} = 3$; $(\sqrt[4]{x})^4 = 3^4$; $x = 81$;

в) $\sqrt{x} = 5$; $(\sqrt{x})^2 = 5^2$; $x = 25$;

г) $\sqrt[7]{x} = -1$; $(\sqrt[7]{x})^7 = (-1)^7$; $x = -1$.

389. а) $(-\sqrt[4]{11})^4 = (-1)^4 \cdot (\sqrt[4]{11})^4 = 11$ б) $(2\sqrt[5]{-2})^5 = (-2)^5 \cdot (\sqrt[5]{2})^5 = -32 \cdot 2 = -64$;

в) $(\sqrt[3]{7})^3 = \sqrt[3]{7^3} = 7$; г) $(-\sqrt[6]{2})^6 = (-1)^6 (\sqrt[6]{2})^6 = 2$.

390.

а) $\sqrt[4]{16 \cdot 625} = \sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{625} = 2 \cdot 5 = 10$; б) $\sqrt[3]{32 \cdot 243} = \sqrt[3]{32} \cdot \sqrt[3]{243} = 2 \cdot 3 = 6$;

в) $\sqrt[3]{8 \cdot 343} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{343} = 2 \cdot 7 = 14$; г) $\sqrt[4]{0,0001 \cdot 16} = \sqrt[4]{0,0001} \cdot \sqrt[4]{16} = 0,1 \cdot 2 = 0,2$.

391. а) $\sqrt[5]{160 \cdot 625} = \sqrt[5]{32} \cdot \sqrt[5]{5^5} = 2 \cdot 5 = 10$;

б) $\sqrt[3]{24 \cdot 9} = \sqrt[3]{8 \cdot 27} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} = 2 \cdot 3 = 6$;

$$\text{в)} \sqrt[4]{48 \cdot 27} = \sqrt[4]{16 \cdot 81} = \sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{81} = 2 \cdot 3 = 6;$$

$$\text{г)} \sqrt[3]{75 \cdot 45} = \sqrt[3]{125 \cdot 27} = \sqrt[3]{125} \cdot \sqrt[3]{27} = 5 \cdot 3 = 15.$$

392.

$$\text{а)} \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[6]{9} = \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{27} = 3; \quad \text{б)} \sqrt[7]{16} \cdot \sqrt[7]{-8} = \sqrt[7]{-128} = -2;$$

$$\text{в)} \sqrt[5]{27} \cdot \sqrt[5]{9} = \sqrt[5]{243} = 3; \quad \text{г)} \sqrt[3]{-25} \cdot \sqrt[6]{25} = \sqrt[3]{-25} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{-125} = -5.$$

$$\text{393. а)} \frac{\sqrt[3]{-625}}{\sqrt[3]{-5}} = \sqrt[3]{125} = 5; \quad \text{б)} \frac{\sqrt[4]{128}}{\sqrt[4]{8}} = \sqrt[4]{\frac{128}{8}} = \sqrt[4]{16} = 2;$$

$$\text{в)} \frac{\sqrt[3]{243}}{\sqrt[3]{-9}} = \sqrt[3]{-\frac{243}{9}} = \sqrt[3]{-27} = -3; \quad \text{г)} \frac{\sqrt[6]{128}}{\sqrt[6]{2}} = \sqrt[6]{\frac{128}{2}} = \sqrt[6]{64} = 2.$$

394.

$$\text{а)} \sqrt[6]{\frac{64}{100000000}} \cdot \sqrt[4]{39 \frac{1}{16}} \cdot \sqrt[3]{-3 \frac{19}{27}} = \frac{\sqrt[6]{64}}{\sqrt[6]{100000000}} \cdot \frac{\sqrt[4]{625}}{\sqrt[4]{16}} \cdot \frac{\sqrt[3]{-100}}{\sqrt[3]{27}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt[3]{10000}} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt[3]{-100}} = \frac{15}{\sqrt[3]{-1000000}} = -\frac{15}{100} = -0,15;$$

$$\text{б)} \sqrt[5]{1 \frac{11}{16}} \cdot 4,5 - \frac{\sqrt[5]{9}}{\sqrt[5]{288}} = \sqrt[5]{\frac{27}{16} \cdot \frac{9}{2}} - \sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \frac{\sqrt[5]{243}}{\sqrt[5]{32}} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1;$$

$$\text{в)} \sqrt[5]{-\frac{243}{1024}} \cdot \sqrt[3]{-4 \frac{17}{27}} = \frac{\sqrt[5]{-243}}{\sqrt[5]{1024}} \cdot \frac{\sqrt[3]{-125}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{-3}{4} \cdot \frac{(-5)}{3} = \frac{5}{4} = 1 \frac{1}{4};$$

$$\text{г)} \sqrt[4]{3 \frac{3}{8}} \cdot 1 \frac{1}{2} + \frac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt[4]{80}} = \sqrt[4]{\frac{27 \cdot 3}{8 \cdot 2}} + \sqrt[4]{\frac{5}{80}} = \sqrt[4]{\frac{81}{16}} + \sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2;$$

395.

$$\text{а)} 1 < \sqrt[4]{2} < 2, \text{ т.к. } 1^4 < 2 < 2^4; \quad 1,1 < \sqrt[4]{2} < 1,2, \text{ т.к. } 1,1^4 < 2 < 1,2^4;$$

$$1,18 < \sqrt[4]{2} < 1,19, \text{ т.к. } 1,18^4 < 2 < 1,19^4; \quad \sqrt[4]{2} = 1,18...;$$

$$\text{б)} 1 < \sqrt[3]{5} < 2, \text{ т.к. } 1^3 < 5 < 2^3; \quad 1,7 < \sqrt[3]{5} < 1,8, \text{ т.к. } 1,7^3 < 5 < 1,8^3;$$

$$1,70 < \sqrt[3]{5} < 1,71, \text{ т.к. } 1,7^3 < 5 < 1,71^3; \quad \sqrt[3]{5} = 1,70...;$$

$$\text{в)} 2 < \sqrt{7} < 3, \text{ т.к. } 2^2 < 7 < 3^2; \quad 2,6 < \sqrt{7} < 2,7, \text{ т.к. } 2,6^2 < 7 < 2,7^2;$$

$$2,64 < \sqrt{7} < 2,65, \text{ т.к. } 2,64^2 < 7 < 2,65^2; \quad \sqrt{7} = 2,64...;$$

$$\text{г)} 1 < \sqrt[3]{3} < 2, \text{ т.к. } 1^3 < 3 < 2^3; \quad 1,4 < \sqrt[3]{3} < 1,5, \text{ т.к. } 1,4^3 < 3 < 1,5^3;$$

$$1,44 < \sqrt[3]{3} < 1,45, \text{ т.к. } 1,44^3 < 3 < 1,45^3; \quad \sqrt[3]{3} = 1,44...;$$

396.

$$\text{а)} \sqrt[3]{10,17} \approx 2,17; \quad \text{б)} \sqrt{71} \approx 8,43; \quad \text{в)} \sqrt{13,21} \approx 3,63; \quad \text{г)} \sqrt[3]{11} \approx 2,22.$$

397.

$$\text{а)} \sqrt[9]{13,7} \approx 1,34; \quad \text{б)} \sqrt[6]{10} \approx 1,47; \quad \text{в)} \sqrt[4]{2,8} \approx 1,29; \quad \text{г)} \sqrt[8]{13} \approx 1,38.$$

398.

- а) $\sqrt[5]{0,2} > 0$, т.к. $0,2 > 0$ и $\sqrt[5]{0} = 0$; б) $\sqrt[12]{0,4} < \sqrt[12]{\frac{5}{12}}$, т.к. $0,4 = \frac{24}{60} < \frac{25}{60} = \frac{5}{12}$;
в) $\sqrt[7]{1,8} > 1$, т.к. $1,8 > 1$ и $\sqrt[7]{1} = 1$; г) $\sqrt[8]{0,2} < \sqrt[8]{0,3}$, т.к. $0,2 < 0,3$.

399. а) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$; $\left(\sqrt[6]{\frac{1}{2}}\right)^2 = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$; $\sqrt[3]{\frac{1}{4}} < \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$, т.о. $\frac{1}{2}\sqrt[3]{2} < \left(\sqrt[6]{\frac{1}{2}}\right)^2$;

б) $\sqrt[18]{\frac{3}{7}} < \sqrt[18]{0,43}$, т.к. $\frac{3}{7} = \frac{300}{700} < \frac{301}{700} = 0,43$;

в) $\sqrt[5]{2} < \sqrt[5]{3}$, т.к. $2 < 3$; г) $\sqrt[8]{0,8} < 1$, т.к. $0,8 < 1$ и $1 = \sqrt[8]{1}$.

400. а) $\sqrt[10]{0,3} = \sqrt[10]{0,3^5} = \sqrt[10]{0,00243}$; $\sqrt[5]{0,05} = \sqrt[10]{0,05^2} = \sqrt[10]{0,0025}$;

$\sqrt[10]{0,0025} > \sqrt[10]{0,00243}$, т.о. $\sqrt[5]{0,05} > \sqrt[10]{0,00243}$;

б) $\sqrt[3]{4} = \sqrt[15]{4^5} = \sqrt[15]{1024}$; $\sqrt[5]{8} = \sqrt[15]{8^3} = \sqrt[15]{512}$; $\sqrt[15]{1024} > \sqrt[15]{512}$, т.о. $\sqrt[3]{4} > \sqrt[5]{8}$;

в) $\sqrt[3]{7} = \sqrt[6]{7^2} = \sqrt[6]{49}$; $\sqrt[6]{49} > \sqrt[6]{40}$, т.о. $\sqrt[3]{7} > \sqrt[6]{40}$;

г) $\sqrt{5} = \sqrt[8]{5^4} = \sqrt[8]{625}$; $\sqrt[8]{625} > \sqrt[8]{500}$, т.о. $\sqrt{5} > \sqrt[8]{500}$.

401.

а) $\sqrt[3]{-0,4} = -\sqrt[15]{0,4^5} = -\sqrt[15]{0,01024}$; $\sqrt[5]{-0,3} = -\sqrt[15]{0,3^3} = -\sqrt[15]{0,009}$;
 $\sqrt[15]{0,01024} < \sqrt[15]{0,009}$, $-\sqrt[15]{0,01024} > -\sqrt[15]{0,009}$; т.о. $\sqrt[3]{-0,4} > \sqrt[5]{-0,3}$;

б) $\sqrt[5]{-5} = -\sqrt[15]{5^3} = -\sqrt[15]{125}$; $\sqrt[3]{-3} = -\sqrt[15]{3^5} = -\sqrt[15]{243}$;
 $-\sqrt[15]{125} > -\sqrt[15]{243}$, т.о. $\sqrt[5]{-5} > \sqrt[3]{-3}$;

в) $\sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2} > -\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{-4}$;

г) $\sqrt[3]{-5} = -\sqrt[15]{5^5} = -\sqrt[15]{3125}$; $\sqrt[5]{-3} = -\sqrt[15]{3^3} = -\sqrt[15]{27}$;
 $\sqrt[15]{3125} > \sqrt[15]{27}$, $-\sqrt[15]{3125} < -\sqrt[15]{27}$, $\sqrt[3]{-5} < \sqrt[5]{-3}$.

402.

а) $\sqrt[6]{64a^8b^{11}} = \sqrt[6]{(2ab)^6} \cdot \sqrt[6]{a^2b^5} = 2ab\sqrt[6]{a^2b^5}$;

б) $\sqrt[5]{-128a^7} = -\sqrt[5]{(2a)^5} \cdot \sqrt[5]{4a^2} = -2a\sqrt[5]{4a^2}$;

в) $\sqrt[4]{6a^{12}b^6} = \sqrt[4]{(a^3b)^4} \cdot \sqrt[4]{6b^2} = a^3b\sqrt[4]{6b^2}$;

г) $\sqrt[3]{54a^{10}} = \sqrt[3]{(3a^3)^3} \cdot \sqrt[3]{2a} = 3a^3\sqrt[3]{2a}$.

$$403. \text{ а) } -b\sqrt[4]{3} = -\sqrt[4]{b^4} \cdot \sqrt[4]{3} = -\sqrt[4]{3b^4}; \quad \text{б) } ab\sqrt[8]{\frac{5b^3}{a^7}} = \sqrt[8]{a^8b^8} \cdot \sqrt[8]{\frac{5b^3}{a^7}} = \sqrt[8]{5ab^{11}};$$

$$\text{в) } a\sqrt[4]{7} = \sqrt[4]{a^4} \cdot \sqrt[4]{7} = \sqrt[4]{7a^4}; \quad \text{г) } -ab\sqrt[3]{-4} = \sqrt[3]{-a^3b^3} \cdot \sqrt[3]{-4} = \sqrt[3]{4a^3b^3}.$$

404.

$$\text{а) } \sqrt{a^2} = |a|, |a| = -a \text{ справедливо только при } a \leq 0, \text{ т.о. } \sqrt{a^2} = -a \text{ при } a \leq 0;$$

$$\text{б) } \sqrt[3]{a^3} = a \text{ при любом } a;$$

$$\text{в) } \sqrt[5]{a^5} = a, a = |a| \text{ справедливо только при } a \geq 0, \text{ т.о. } \sqrt[5]{a^5} = |a| \text{ при } a \geq 0;$$

$$\text{г) } \sqrt[4]{a^4} = |a|, |a| = a \text{ справедливо только при } a \geq 0, \text{ т.о. } \sqrt[4]{a^4} = a \text{ при } a \geq 0.$$

405.

$$\text{а) } \sqrt[3]{a^3} = a \text{ при любом } a, a = -a \text{ при } a = 0, \text{ значит } \sqrt[3]{a^3} = -a \text{ при } a = 0;$$

$$\text{б) } \sqrt[6]{a^6} = |a|, |a| = -a \text{ при } a \leq 0, \text{ значит } \sqrt[6]{a^6} = -a \text{ при } a \leq 0;$$

$$\text{в) } \sqrt[4]{a^4} = |a| \text{ при любом } a; \text{ г) } \sqrt[7]{a^7} = a \text{ при любом } a.$$

$$406. \text{ а) } \frac{3}{\sqrt{7} - \sqrt{5}} = \frac{3(\sqrt{7} + \sqrt{5})}{(\sqrt{7})^2 - (\sqrt{5})^2} = \frac{3(\sqrt{7} + \sqrt{5})}{2};$$

$$\text{б) } \frac{a - \sqrt{2}}{a + \sqrt{2}} = \frac{(a - \sqrt{2})^2}{a^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{a^2 - 2\sqrt{2} + 2}{a^2 - 2};$$

$$\text{в) } \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{3};$$

$$\text{г) } \frac{\sqrt{6} + 1}{\sqrt{6} - 1} = \frac{(\sqrt{6} + 1)^2}{5} = \frac{6 + 1 + 2\sqrt{6}}{5} = \frac{7 + 2\sqrt{6}}{5}.$$

$$407. \text{ а) } \frac{a}{\sqrt[3]{2}} = \frac{a \cdot \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{a\sqrt[3]{2}}{2}; \quad \text{б) } \frac{x - \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} - 1}{2};$$

$$\text{в) } \frac{4}{x\sqrt[4]{4}} = \frac{4\sqrt[4]{4^3}}{x\sqrt[4]{4^4}} = \frac{\sqrt[4]{64}}{x} = \frac{2\sqrt{2}}{x}; \quad \text{г) } \frac{5}{3\sqrt[5]{5}} = \frac{5\sqrt[5]{5^4}}{3\sqrt[5]{5^5}} = \frac{\sqrt[5]{625}}{3}.$$

$$408. \text{ а) } \frac{2}{\sqrt[3]{4}} = \frac{2\sqrt[3]{4^2}}{\sqrt[3]{4^3}} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{16}; \quad \text{б) } \frac{6}{\sqrt[5]{27 \cdot 25}} = \frac{6 \cdot \sqrt[5]{3^2} \cdot \sqrt[5]{5^3}}{\sqrt[5]{3^5} \cdot \sqrt[5]{5^5}} = \frac{6}{15}\sqrt[5]{9 \cdot 125};$$

$$\text{в) } \frac{3}{\sqrt[4]{12}} = \frac{3 \cdot \sqrt[4]{2^2} \cdot \sqrt[4]{3^3}}{\sqrt[4]{2^4} \cdot \sqrt[4]{3^4}} = \frac{3}{6}\sqrt[4]{4 \cdot 27} = \frac{1}{2}\sqrt[4]{108}; \quad \text{г) } \frac{10}{\sqrt[3]{8}} = \frac{10\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{10}{2}\sqrt[3]{4} = 5\sqrt[3]{4}.$$

409.

$$a) \sqrt[12]{25^3} = \sqrt[12]{5^6} = \sqrt{5}; \quad б) \sqrt[3]{\frac{1}{2}\sqrt[4]{2}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{\frac{1}{8}}} = \sqrt[4]{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt[4]{2^3} = 0,5\sqrt[4]{8};$$

$$в) \sqrt[8]{\frac{16^3}{81}} = \sqrt[8]{\frac{2^{12} \cdot 3^4}{3^8}} = \frac{2}{3}\sqrt[8]{2^4 \cdot 3^4} = \frac{2}{3}\sqrt{6};$$

$$г) \sqrt[4]{\frac{1}{4}\sqrt[3]{5}} = \sqrt[12]{\frac{5}{4^3}} = \frac{1}{4}\sqrt[12]{5 \cdot 4^9} = \frac{1}{4}\sqrt[12]{5 \cdot 2^6} \cdot \sqrt[12]{2^{12}} = \frac{1}{2}\sqrt[12]{320}.$$

410.

$$a) \sqrt[3]{x} - 5\sqrt[6]{x} + 6 = 0; \quad \sqrt[6]{x} = t; \quad t \geq 0;$$

$$t^2 - 5t + 6 = 0; \quad t_1 = 2, \quad t_2 = 3;$$

$$\sqrt[6]{x} = 2, \quad x = 2^6 = 64;$$

$$\sqrt[6]{x} = 3, \quad x = 3^6 = 729;$$

$$в) \sqrt{x} - 3\sqrt[4]{x} + 2 = 0; \quad \sqrt[4]{x} = t; \quad t \geq 0;$$

$$t^2 - 3t + 2 = 0; \quad t_1 = 1, \quad t_2 = 2;$$

$$\sqrt[4]{x} = 1, \quad x = 1; \quad \sqrt[4]{x} = 2, \quad x = 2^4 = 16;$$

$$б) \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} = 2; \quad \sqrt[3]{x} = t; \quad t \geq 0;$$

$$t^2 + t - 2 = 0; \quad t_1 = -2, \quad t_2 = 1;$$

$$\sqrt[3]{x} = -2 - \text{не имеет решений};$$

$$\sqrt[3]{x} = 1, \quad x = 1;$$

$$г) \sqrt[3]{x} - 5\sqrt[6]{x} = 6; \quad \sqrt[6]{x} = t; \quad t \geq 0;$$

$$t^2 - 5t - 6 = 0; \quad t_1 = -1, \quad t_2 = 6;$$

$$\sqrt[6]{x} = -1 - \text{не имеет решений};$$

$$\sqrt[6]{x} = 6, \quad x = 6^6 = 46656.$$

411.

$$a) \begin{array}{c} + \quad - \quad + \\ | \quad | \quad | \\ -\sqrt[4]{3} \quad \sqrt[4]{3} \end{array} \rightarrow$$

$$x^4 < 3; \quad x_1 = -\sqrt[4]{3}, \quad x_2 = \sqrt[4]{3}.$$

$$\text{Ответ: } (-\sqrt[4]{3}; \sqrt[4]{3}).$$

$$в) \begin{array}{c} + \quad - \quad + \\ | \quad | \quad | \\ -\sqrt[10]{2} \quad \sqrt[10]{2} \end{array} \rightarrow$$

$$x^{10} > 2; \quad x_1 = -\sqrt[10]{2}, \quad x_2 = \sqrt[10]{2}.$$

$$\text{Ответ: } (-\infty; -\sqrt[10]{2}) \cup (\sqrt[10]{2}; \infty)$$

$$б) \begin{array}{c} - \quad + \\ | \quad | \\ \sqrt[11]{7} \end{array} \rightarrow$$

$$x^{11} \geq 7; \quad x = \sqrt[11]{7};$$

$$\text{Ответ: } [\sqrt[11]{7}; \infty)$$

$$г) \begin{array}{c} - \quad + \\ | \quad | \\ \sqrt[3]{5} \end{array} \rightarrow$$

$$x^3 \leq 5; \quad x = \sqrt[3]{5}.$$

$$\text{Ответ: } (-\infty; \sqrt[3]{5}]$$

412.

$$a) \begin{array}{c} - \quad + \\ | \quad | \\ -343 \end{array} \rightarrow$$

$$\sqrt[3]{x} < -7; \quad x = (-7)^3 = -343;$$

$$\text{Ответ: } (-\infty; -343).$$

$$в) \begin{array}{c} - \quad + \\ | \quad | \\ 8 \end{array} \rightarrow$$

$$\sqrt[3]{x} > 2; \quad x = 8; \quad \text{Ответ: } (8; \infty).$$

$$б) \begin{array}{c} - \quad + \\ | \quad | \\ 0 \quad 6 \end{array} \rightarrow$$

$$\sqrt[6]{x} \geq 2; \quad x = 64.$$

$$\text{Ответ: } [64; \infty).$$

$$г) \begin{array}{c} - \quad + \\ | \quad | \\ 0 \quad 81 \end{array} \rightarrow$$

$$\sqrt[4]{x} \leq 3; \quad x = 81. \quad \text{Ответ: } [0; 81].$$

413.

а) $\sqrt[6]{a^6} = |a| = -a$, где $a \leq 0$; в) $\sqrt[5]{a^5} = a$;

б) $\sqrt[4]{a^4} = |a| = a$, где $a \geq 0$;

414. а) $\sqrt[3]{a^3} - \sqrt{a^2} = a - |a| = a + a = 2a$, где $a \leq 0$;

б) $\sqrt[4]{a^4} + 2\sqrt[7]{a^7} = |a| + 2a = a + 2a = 3a$, где $a \geq 0$;

в) $\sqrt[5]{a^5} - \sqrt[6]{a^6} = a - |a| = a - a = 0$, где $a \geq 0$;

г) $\sqrt[3]{a^3} + 3\sqrt[8]{a^8} = a + 3|a| = a - 3a = -2a$, где $a \leq 0$.

415. а) $\sqrt[3]{10 + \sqrt{73}} \cdot \sqrt[3]{10 - \sqrt{73}} = \sqrt[3]{10^2 - (\sqrt{73})^2} = \sqrt[3]{27} = 3$;

б) $\frac{\sqrt[3]{(4 + \sqrt{17})^2}}{\sqrt[3]{4 - \sqrt{17}}} + \sqrt{17} = \frac{\sqrt[3]{(4 + \sqrt{17})^3}}{\sqrt[3]{4^2 - (\sqrt{17})^2}} + \sqrt{17} = -(4 + \sqrt{17}) + \sqrt{17} = -4$;

в) $\sqrt[4]{9 - \sqrt{65}} \cdot \sqrt[4]{9 + \sqrt{65}} = \sqrt[4]{9^2 - (\sqrt{65})^2} = \sqrt[4]{16} = 2$;

г) $\sqrt{3 - \sqrt{5}} \cdot \sqrt{3 + \sqrt{5}} = \sqrt{3^2 - (\sqrt{5})^2} = \sqrt{4} = 2$.

416. а) $\frac{1}{\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3}} = \frac{\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2 \cdot 3} + \sqrt[3]{3^2}}{(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2 \cdot 3} + \sqrt[3]{3^2})} = -\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{9}$;

б) $\frac{2}{a - \sqrt[3]{b}} = \frac{2(a^2 + a\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b^2})}{(a - \sqrt[3]{b})(a^2 + a\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b^2})} = \frac{2(a^2 + a\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b^2})}{a^3 - b}$;

в) $\frac{2}{\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{7}} = \frac{2(\sqrt[3]{5^2} - \sqrt[3]{5 \cdot 7} + \sqrt[3]{7^2})}{(\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{7})(\sqrt[3]{5^2} - \sqrt[3]{5 \cdot 7} + \sqrt[3]{7^2})} = \frac{\sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{35} + \sqrt[3]{49}}{6}$;

г) $\frac{3a}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}} = \frac{3a(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})}{(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})} = \frac{3a(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})}{a + b}$.

33. Иррациональные уравнения

417.

а) $\sqrt{x^4 + 19} = 10 \Leftrightarrow x^4 + 19 = 100 \Leftrightarrow x^4 = 81 \Leftrightarrow x = \pm 3$;

б) $\sqrt[3]{x^2 - 28} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 28 = 8 \Leftrightarrow x^2 = 36 \Leftrightarrow x = \pm 6$;

$$\text{в)} \sqrt{61-x^2} = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} 61-x^2 \geq 0, \\ 61-x^2 = 25; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \leq 61, \\ x^2 = 36 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm 6;$$

$$\text{г)} \sqrt[3]{x-9} = -3 \Leftrightarrow x-9 = -27 \Leftrightarrow x = -18.$$

418.

$$\text{а)} \sqrt{x+1} = x-5 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = (x-5)^2, \\ x-5 \geq 0, \\ x+1 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 11x + 24 = 0, \\ x \geq 5, \\ x \geq -1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, \\ x = 8; \end{cases} \Leftrightarrow x = 8;$$

$$\text{б)} x + \sqrt{2x+3} = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3 = (6-x)^2, \\ 6-x \geq 0, \\ 2x+3 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 14x + 33 = 0, \\ x \leq 6, \\ x \geq -\frac{3}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, \\ x = 11; \end{cases} \Leftrightarrow x = 3;$$

$$\text{в)} \sqrt{2x-1} = x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 = (x-2)^2, \\ x-2 \geq 0, \\ 2x-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x + 5 = 0, \\ x \geq 2, \\ x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ x = 5; \end{cases} \Leftrightarrow x = 5;$$

$$\text{г)} 3 + \sqrt{3x+1} = x \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+1 = (x-3)^2, \\ x-3 \geq 0, \\ 3x+1 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 9x + 8 = 0, \\ x \geq 3, \\ x \geq -\frac{1}{3}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ x = 8; \end{cases} \Leftrightarrow x = 8.$$

419.

$$\text{а)} \sqrt{2x+1} = \sqrt{x^2-2x+4} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 = x^2-2x+4, \\ 2x+1 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x+3=0, \\ x \geq -0,5; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ x = 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 3; \end{cases} \text{см.}$$

$$\text{б)} \sqrt{x} = \sqrt{x^2-x-3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x^2-x-3, \\ x \geq 0, \\ x^2-x-3 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x-3=0, \\ x \geq \frac{1+\sqrt{13}}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, \\ x = 3; \end{cases} \Leftrightarrow x = 3;$$

$$\text{в)} \sqrt{x+2} = \sqrt{2x-3} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 = 2x-3, \\ x+2 \geq 0, \\ 2x-3 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5, \\ x \geq 1,5; \end{cases} \Leftrightarrow x = 5;$$

$$\text{г)} \sqrt{9-x^2} = \sqrt{x+9} \Leftrightarrow \begin{cases} 9-x^2 = 9+x, \\ 9-x^2 \geq 0, \\ x+9 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+1) = 0, \\ x \geq -3, \\ x \leq 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, \\ x = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3, \\ x \leq 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 = 0; \end{cases}$$

420.

$$\text{a) } x = \sqrt[3]{x^3 + x^2 - 6x + 8} \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 6x + 8 = x^3 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = 4; \end{cases}$$

$$\text{б) } x - 2 = \sqrt[3]{x^2 - 8} \Leftrightarrow (x - 2)^3 = x^2 - 8 \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = x^2 - 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(x^2 - 7x + 12) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 3, \\ x_3 = 4; \end{cases}$$

$$\text{в) } x = \sqrt[3]{x^3 - x^2 - 8x + 20} \Leftrightarrow x^3 = x^3 - x^2 - 8x + 20 \Leftrightarrow x^2 + 8x - 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -10, \\ x_2 = 2; \end{cases}$$

$$\text{г) } x + 1 = \sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + x} \Leftrightarrow (x + 1)^3 = x^3 + 2x^2 + 2 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = x^3 + 2x^2 + x \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

421.

$$\text{a) } \begin{cases} \sqrt[3]{x} + 2\sqrt[3]{y} = 1, \\ 3\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 10; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x} + 2\sqrt[3]{y} = 1, \\ 6\sqrt[3]{x} - 2\sqrt[3]{y} = 20; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x} + 2\sqrt[3]{y} = 1, \\ 7\sqrt[3]{x} = 21; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{y} = \frac{1}{2}(1 - \sqrt[3]{x}), \\ \sqrt[3]{x} = 3; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{y} = -1, \\ \sqrt[3]{x} = 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1, \\ x = 27; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 4\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y} = 2\sqrt{2}, \\ 2\sqrt[4]{x} + 3\sqrt[4]{y} = 8\sqrt{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12\sqrt[4]{x} - 3\sqrt[4]{y} = 6\sqrt{2}, \\ 2\sqrt[4]{x} + 3\sqrt[4]{y} = 8\sqrt{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[4]{y} = 4\sqrt[4]{x} - 2\sqrt{2}, \\ 14\sqrt[4]{x} = 14\sqrt{2}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[4]{y} = 4\sqrt[4]{x} - 2\sqrt{2}, \\ \sqrt[4]{x} = \sqrt{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 64, \\ x = 4; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} 2\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 7, \\ 4\sqrt[4]{y} - 3\sqrt[4]{x} = 6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8\sqrt[4]{x} - 4\sqrt[4]{y} = -28, \\ -3\sqrt[4]{x} + 4\sqrt[4]{y} = 6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[4]{y} = 7 - 2\sqrt[4]{x}, \\ -11\sqrt[4]{x} = -22; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[4]{y} = 7 - 2 \cdot 2, \\ \sqrt[4]{x} = 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 81, \\ x = 16; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} \sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 5\sqrt{5}, \\ 5\sqrt{y} - 2\sqrt{x} = \sqrt{5}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x} + 6\sqrt{y} = 10\sqrt{5}, \\ -2\sqrt{x} + 5\sqrt{y} = \sqrt{5}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 5\sqrt{5} - 3\sqrt{y}, \\ 11\sqrt{y} = 11\sqrt{5}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 5\sqrt{5} - 3\sqrt{5}, \\ \sqrt{y} = \sqrt{5}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20, \\ y = 5. \end{cases}$$

422.

$$\text{a) } \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x+6} = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(x+6) = 36, \\ x+1 \geq 0, \\ x+6 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 7x - 30 = 0, \\ x \geq -1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -10, \\ x = 3; \end{cases} \Leftrightarrow x = 3;$$

$$\begin{aligned}
\text{б)} \frac{x+1}{\sqrt{2x-1}} = \sqrt{x+1} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(x-1) \cdot \sqrt{(2x-1)}} = x+1, \\ x-1 \geq 0, \\ 2x-1 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(2x-1) = (x+1)^2, \\ x-1 \geq 0, \\ 2x-1 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 3x + 1 = x^2 + 2x + 1, \\ x \geq 1, \\ x > 0,5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x = 0, \\ x \geq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 5; \Leftrightarrow x = 5; \\ x \geq 1; \end{cases} \\
\text{в)} \frac{x+6}{\sqrt{x-2}} = \sqrt{3x+2} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3x+2} \cdot \sqrt{x-2} = x+6, \\ x-2 > 0; \\ 3x+2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3x+2)(x-2) = (x+6)^2, \\ 3x+2 \geq 0, \\ x-2 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 4x - 4 = x^2 + 12x + 36, \\ x > 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 16x - 40 = 0, \\ x > 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2, \\ x_2 = 10; \Leftrightarrow x = 10; \\ x > 2; \end{cases} \\
\text{г)} \sqrt{x}\sqrt{2-x} = 2x &\Leftrightarrow \begin{cases} x(2-x) = 4x^2, \\ x \geq 0, \\ 2-x \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - x^2 = 4x^2, \\ x \geq 0, \\ x \leq 2; \end{cases} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 5x(x-0,4) = 0, \\ x \geq 0, \\ x \leq 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 0,4; \\ x \geq 0, \\ x \leq 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 0,4; \end{cases}
\end{aligned}$$

423. а) $\sqrt{5 + \sqrt[3]{x+3}} = 3, 5 + \sqrt[3]{x+3} = 9, x + 3 = 64, x = 61.$

Проверка: $\sqrt{5 + \sqrt[3]{61+3}} = 3.$ Итого: $x = 61.$

б) $\sqrt{\sqrt{x^2-16} + x} = 2, \sqrt{x^2-16} + x = 4, x^2-16 = (4-x)^2, x^2-16 = x^2 - 8x + 16, -8x + 32 = 0, x = 4.$

Проверка: $\sqrt{\sqrt{4^2-16} + 4} = 2.$ Итого: $x = 4.$

в) $\sqrt{18 - \sqrt[3]{x+10}} = 4, 18 - \sqrt[3]{x+10} = 16, x + 10 = 8, x = -2.$

Проверка: $\sqrt{18 - \sqrt[3]{-2+10}} = 4.$ Итого: $x = -2.$

г) $\sqrt{x - \sqrt{x^2-5}} = 1, x - \sqrt{x^2-5} = 1, x^2-5 = (x-1)^2, 2x-6=0, x=3.$

Проверка: $\sqrt{3 - \sqrt{3^2-5}} = 1.$ Итого: $x = 3.$

424. а) $\sqrt{x-3} = 1 + \sqrt{x-4}, x-3 = 1 + 2\sqrt{x-4} + x-4, \sqrt{x-4} = 0, x = 4.$

Проверка: $\sqrt{4-3} = 1 + \sqrt{4-4}.$ Итого: $x = 4.$

$$\text{б) } \sqrt{x+2} - \sqrt{x-6} = 2, \quad x+2 = 4 + 4\sqrt{x-6} + x-6, \quad \sqrt{x-6} = 1, \quad x = 7.$$

$$\text{Проверка: } \sqrt{7+2} - \sqrt{7-6} = 2. \quad \text{Итого: } x = 7.$$

$$\text{в) } 2 + \sqrt{10-x} = \sqrt{22-x}, \quad 4 + 4\sqrt{10-x} + 10 - x = 22 - x, \quad \sqrt{10-x} = 2, \quad x = 6.$$

$$\text{Проверка: } 2 + \sqrt{10-6} = \sqrt{22-6}. \quad \text{Итого: } x = 6.$$

$$\text{г) } \sqrt{1-2x} - 3 = \sqrt{16+x}, \quad 1-2x-6\sqrt{1-2x}+9=16+x, \quad -6\sqrt{1-2x}=6+3x.$$

$$1-2x=0, 25x^2+x+1, x(x+12)=0, \begin{cases} x=0, \\ x=-12. \end{cases}$$

$$\text{Проверка: } \sqrt{1-2 \cdot 0} - 3 \neq \sqrt{16+0}; \quad \text{При } x = -12: \sqrt{1+2 \cdot 12} - 3 = \sqrt{16-12}.$$

$$\text{Итого: } x = -12.$$

425.

$$\text{а) } \sqrt{x-3} - 6 = \sqrt[4]{x-3}; \quad \sqrt[4]{x-3} = t; \quad t^2 - t - 6 = 0; \quad t_1 = -2, \quad t_2 = 3;$$

$$\text{при } t = -2: \sqrt[4]{x-3} = -2 - \text{нет решений}; \quad \text{при } t = 3: \sqrt[4]{x-3} = 3;$$

$$x-3=81; \quad x=84. \quad \text{Итого: } x=84.$$

$$\text{б) } \sqrt[3]{x+1} + 2\sqrt[6]{x+1} = 3; \quad \sqrt[6]{x+1} = t; \quad t^2 + 2t - 3 = 0; \quad t_1 = -3; \quad t_2 = 1;$$

$$\text{при } t = -3: \sqrt[6]{x+1} = -3 - \text{нет решений};$$

$$\text{при } t = 1: \sqrt[6]{x+1} = 1; \quad x+1=1; \quad x=0. \quad \text{Итого: } x=0.$$

$$\text{в) } \sqrt[4]{x-5} = 30 - \sqrt{x-5}; \quad \sqrt[4]{x-5} = t; \quad t^2 + t - 30 = 0; \quad t_1 = -6, \quad t_2 = 5;$$

$$\text{при } t = -6: \sqrt[4]{x-5} = -6 - \text{нет решений}; \quad \text{при } t = 5: \sqrt[4]{x-5} = 5;$$

$$x-5=625; \quad x=630. \quad \text{Итого: } x=630.$$

$$\text{г) } 3\sqrt[10]{x^2} - 3 + \sqrt[5]{x^2} - 3 = 4; \quad \sqrt[10]{x^2} - 3 = t;$$

$$t^2 + 3t - 4 = 0; \quad t_1 = -4, \quad t_2 = 1;$$

$$\text{при } t = -4: \sqrt[10]{x^2} - 3 = -4 - \text{нет решений};$$

$$\text{при } t = 1: \sqrt[10]{x^2} - 3 = 1; \quad x^2 - 3 = 1; \quad x = \pm 2.$$

$$\text{Итого: } x = \pm 2.$$

426.

$$\text{а) } \begin{cases} 2\sqrt{x} - \sqrt{y} = 5, \\ \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{y} = 2\sqrt{x} - 5, \\ \sqrt{x}(2\sqrt{x} - 5) = 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{y} = 2\sqrt{x} - 5, \\ 2(\sqrt{x})^2 - 5\sqrt{x} - 3 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{y} = 2\sqrt{x} - 5, \\ \begin{cases} \sqrt{x} = -\frac{1}{2}, \\ \sqrt{x} = 3; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} \sqrt{y} = -6, \\ \sqrt{x} = -\frac{1}{2}; \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{y} = 1, \\ \sqrt{x} = 3; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9, \\ y = 1. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} \sqrt{6+x} - 3\sqrt{3y+4} = -10, \\ 4\sqrt{3y+4} - 5\sqrt{6+x} = 6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5\sqrt{6+x} - 15\sqrt{3y+4} = -50, \\ -5\sqrt{6+x} + 4\sqrt{3y+4} = 6; \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{6+x} = -10 + 3\sqrt{3y+4}, \\ \sqrt{3y+4} = 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{6+x} = 2, \\ \sqrt{3y+4} = 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2, \\ y = 4. \end{cases} \\
\text{B)} & \begin{cases} \sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 10 \\ \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = 8; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 10 - 3\sqrt{y}, \\ \sqrt{y}(10 - 3\sqrt{y}) = 8; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 10 - 3\sqrt{y}, \\ 3(\sqrt{y})^2 - 10\sqrt{y} + 8 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 10 - 3\sqrt{y}, \\ \begin{cases} \sqrt{y} = \frac{4}{3}, \\ \sqrt{y} = 2; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} \sqrt{x} = 6, \\ \sqrt{y} = \frac{4}{3}; \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{x} = 4, \\ \sqrt{y} = 2; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 36, \\ y = 1\frac{7}{9}; \end{cases} \\ \begin{cases} x = 16, \\ y = 4. \end{cases} \end{cases} \\
\text{r)} & \begin{cases} 2\sqrt{x-2} + \sqrt{5y+1} = 8, \\ 3\sqrt{x-2} - 2\sqrt{5y+1} = -2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\sqrt{x-2} + 2\sqrt{5y+1} = 16, \\ 3\sqrt{x-2} - 2\sqrt{5y+1} = -2; \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{5y+1} = 4, \\ \sqrt{x-2} = 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3, \\ x = 6. \end{cases}
\end{aligned}$$

427.

$$\begin{aligned}
\text{a)} & \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 8, \\ x - y = 16; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 8, \\ (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = 16; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 8, \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 2; \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 5, \\ \sqrt{y} = 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 25, \\ y = 9. \end{cases} \\
\text{б)} & \begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 5, \\ xy = 216; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{y} = 5 - \sqrt[3]{x}, \\ (\sqrt[3]{xy})^3 = 6^3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{y} = 5 - \sqrt[3]{x}, \\ \sqrt[3]{x}(5 - \sqrt[3]{x}) = 6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{y} = 5 - \sqrt[3]{x}, \\ \sqrt[3]{x^2} - 5\sqrt[3]{x} + 6 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{y} = 5 - \sqrt[3]{x}, \\ \begin{cases} \sqrt[3]{x} = 2, \\ \sqrt[3]{x} = 3; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} \sqrt[3]{y} = 3, \\ \sqrt[3]{x} = 2; \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt[3]{y} = 2, \\ \sqrt[3]{x} = 3; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} y = 27, \\ x = 8; \end{cases} \\ \begin{cases} y = 8, \\ x = 27. \end{cases} \end{cases} \\
\text{B)} & \begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 4, \\ x - y = 32; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 4, \\ (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = 32; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 4, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 8; \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 6, \\ \sqrt{y} = 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 36, \\ y = 4. \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma) \begin{cases} \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 2, \\ xy = 27; \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x} = 2 + \sqrt[3]{y}, \\ (\sqrt[3]{xy})^3 = 3^3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x} = 2 + \sqrt[3]{y}, \\ \sqrt[3]{y}(2 + \sqrt[3]{y}) = 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x} = 2 + \sqrt[3]{y}, \\ \sqrt[3]{y^2} + 2\sqrt[3]{y} - 3 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x} = 2 + \sqrt[3]{y}, \\ \sqrt[3]{y} = -3, \\ \sqrt[3]{y} = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x} = -1, \\ \sqrt[3]{y} = -3; \\ \sqrt[3]{x} = 3, \\ \sqrt[3]{y} = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, \\ y = -27; \\ x = 27, \\ y = 1; \end{cases}
 \end{aligned}$$

34. Степень с рациональным показателем

428.

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad 3^{1,2} &= 3^{\frac{6}{5}} = \sqrt[5]{3^6} = \sqrt[5]{729}; & \text{б)} \quad 5^{-\frac{2}{3}} &= \sqrt[3]{5^{-2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{25}}; \\
 \text{в)} \quad 4^{1,25} &= 4^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{4^5} = \sqrt[4]{1024}; & \text{г)} \quad 6^{-1\frac{1}{2}} &= 6^{-\frac{3}{2}} = \sqrt{6^{-3}} = \sqrt{\frac{1}{216}}.
 \end{aligned}$$

429.

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad \sqrt[3]{a^{-2}} &= a^{-\frac{2}{3}}; & \text{б)} \quad \sqrt[7]{3b} &= (3b)^{\frac{1}{7}}; & \text{в)} \quad \sqrt[13]{b^{-7}} &= b^{-\frac{7}{13}}; & \text{г)} \quad \sqrt[8]{4^5} &= 4^{\frac{5}{8}}.
 \end{aligned}$$

430.

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad 243^{0,4} &= (3^5)^{0,4} = 3^2 = 9; & \text{б)} \quad \left(\frac{64^4}{3^8}\right)^{-\frac{1}{8}} &= \left(\left(\frac{8}{3}\right)^8\right)^{-\frac{1}{8}} = \left(\frac{8}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{8}; \\
 \text{в)} \quad 16^{\frac{5}{4}} &= (2^4)^{\frac{5}{4}} = 2^5 = 32; & \text{г)} \quad \left(\frac{27^3}{125^6}\right)^{\frac{2}{9}} &= \left(\left(\frac{3}{5^2}\right)^9\right)^{\frac{2}{9}} = \left(\frac{3}{25}\right)^2 = \frac{9}{625}.
 \end{aligned}$$

$$\text{431. а)} \quad 8^{\frac{1}{2}} : \left(8^{\frac{1}{6}} \cdot 9^{\frac{3}{2}}\right) = 8^{\frac{1}{2}} \cdot 8^{-\frac{1}{6}} \cdot 9^{-\frac{3}{2}} = 8^{\frac{1}{3}} \cdot 9^{-\frac{3}{2}} = \frac{2}{27};$$

$$\text{б)} \quad \sqrt[3]{100} \cdot (\sqrt{2})^{\frac{8}{3}} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{2^2 \cdot 5^2} \cdot 2^{\frac{4}{3}} \cdot 5^{-\frac{5}{3}} = 2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{4}{3}} \cdot 5^{\frac{2}{3}} \cdot 5^{-\frac{5}{3}} = 2^2 \cdot 5^{-1} = \frac{4}{5};$$

$$\text{в)} \quad 8^{\frac{2}{3}} : 81^{0,75} = 8^{\frac{2}{3}} : 81^{\frac{3}{4}} = 2^7 \cdot 3^{-3} = \frac{128}{27} = 4\frac{20}{27};$$

$$\text{г)} \quad \left(1\frac{11}{25}\right)^{-0,5} \cdot \left(4\frac{17}{27}\right)^{-\frac{1}{3}} = \left(\left(\frac{6}{5}\right)^2\right)^{-0,5} \cdot \left(\left(\frac{5}{3}\right)^3\right)^{-\frac{1}{3}} = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{2}.$$

$$432. \text{ а) } (ax)^{\frac{1}{3}} + (ay)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}} \left(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}} \right); \quad \text{б) } a - a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} \left(a^{\frac{1}{2}} - 1 \right);$$

$$\text{в) } 3 + 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2}} \left(3^{\frac{1}{2}} + 1 \right); \quad \text{г) } (3x)^{\frac{1}{2}} - (5x)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} \left(3^{\frac{1}{2}} - 5^{\frac{1}{2}} \right).$$

$$433. \text{ а) } x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}} + 1 = x^{\frac{1}{3}} \left(y^{\frac{1}{3}} - 1 \right) - \left(y^{\frac{1}{3}} - 1 \right) = \left(y^{\frac{1}{3}} - 1 \right) \left(x^{\frac{1}{3}} - 1 \right);$$

$$\text{б) } c^{\frac{1}{2}} + c^{\frac{1}{4}} = c^{\frac{1}{4}} \left(c^{\frac{1}{4}} + 1 \right);$$

$$\text{в) } 4 - 4^{\frac{1}{3}} = \left(4^{\frac{1}{3}} \right)^3 - 4^{\frac{1}{3}} = 4^{\frac{1}{3}} \left(4^{\frac{2}{3}} - 1 \right) = 4^{\frac{1}{3}} \left(4^{\frac{1}{3}} - 1 \right) \left(4^{\frac{1}{3}} + 1 \right);$$

$$\text{г) } a + b^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} \left(a^{\frac{1}{2}} + 1 \right) + b^{\frac{1}{2}} \left(a^{\frac{1}{2}} + 1 \right) = \left(a^{\frac{1}{2}} + 1 \right) \left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}} \right).$$

$$434. \text{ а) } \frac{a-b}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}} = \frac{\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}} \right) \left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}} \right)}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}} = a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}};$$

$$\text{б) } \frac{z-8}{z^{\frac{2}{3}} + 2z^{\frac{1}{3}} + 4} = \frac{\left(z^{\frac{1}{3}} - 2 \right) \left(z^{\frac{2}{3}} + 2z^{\frac{1}{3}} + 4 \right)}{z^{\frac{2}{3}} + 2z^{\frac{1}{3}} + 4} = z^{\frac{1}{3}} - 2;$$

$$\text{в) } \frac{x^{\frac{1}{2}} - 4}{x - 16} = \frac{x^{\frac{1}{2}} - 4}{\left(x^{\frac{1}{2}} - 4 \right) \left(x^{\frac{1}{2}} + 4 \right)} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}} + 4};$$

$$\text{г) } \frac{a+b}{a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}} = \frac{\left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}} \right) \left(a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}} \right)}{a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}} = a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}.$$

435.

$$\text{a) } \frac{x-y}{\frac{3}{x^4} + \frac{1}{x^2} y^{\frac{1}{4}}} \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{4}} + x^{\frac{1}{4}} y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}} = \frac{\left(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}\right) \left(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}\right) \cdot x^{\frac{1}{4}} y^{\frac{1}{4}} \left(x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}}\right)}{x^{\frac{1}{2}} \left(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}\right) \cdot \left(x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}}\right)} =$$

$$= \frac{y^{\frac{1}{4}} \left(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}\right)}{\frac{1}{x^{\frac{1}{4}}}};$$

$$\text{б) } \frac{a-1}{a + a^{\frac{1}{2}} + 1} : \frac{a^{\frac{1}{2}} + 1}{a^{\frac{3}{2}} - 1} + 2a^{\frac{1}{2}} = \frac{\left(a^{\frac{1}{2}} - 1\right) \left(a^{\frac{1}{2}} + 1\right)}{a + a^{\frac{1}{2}} + 1} \cdot \frac{\left(a^{\frac{1}{2}} - 1\right) \left(a + a^{\frac{1}{2}} + 1\right)}{a^{\frac{1}{2}} + 1} + 2a^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(a^{\frac{1}{2}} - 1\right)^2 + 2a^{\frac{1}{2}} = a - 2a^{\frac{1}{2}} + 1 + 2a^{\frac{1}{2}} = a + 1;$$

$$\text{в) } \left(\frac{1}{a + a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{a - a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}}\right) \cdot \frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2} = \frac{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}(a-b)} \cdot \frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2} =$$

$$= \frac{2a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}(a-b)} \cdot \frac{(a-b)(a^2 + ab + b^2)}{a^2 + ab + b^2} = \frac{2a(a-b)}{a(a-b)} = 2;$$

$$\text{г) } \frac{\sqrt{x} + 1}{x\sqrt{x} + x + \sqrt{x}} : \frac{1}{x^2 - \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}(x + \sqrt{x} + 1)} \cdot \frac{\sqrt{x}(x\sqrt{x} - 1)}{1} = \frac{x^2 - \sqrt{x} + x\sqrt{x} - 1}{x + \sqrt{x} + 1} =$$

$$= \frac{(x-1)(x+1) + \sqrt{x}(x-1)}{x + \sqrt{x} + 1} = \frac{(x-1)(x + \sqrt{x} + 1)}{x + \sqrt{x} + 1} = x - 1.$$

436. а) $\sqrt[7]{3^3} = 3^{\frac{3}{7}} < 3^{\frac{19}{8}}$, т.к. $\frac{3}{7} < \frac{19}{8}$; а $3 > 1$;

б) $0,4^{-2,7} = \left(\frac{5}{2}\right)^{2,7} = \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{189}{70}} > \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{15}{7}} = \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{150}{70}}$, т.к. $\frac{189}{70} > \frac{150}{70}$; а $\frac{5}{2} > 1$;

в) $\sqrt[3]{6^5} = 6^{\frac{5}{3}} = 6^{\frac{50}{30}} < 6^{1,7} = 6^{\frac{51}{30}}$, т.к. $\frac{50}{30} < \frac{51}{30}$; а $6 > 1$;

г) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{3}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{35}{21}} < \sqrt[7]{\frac{1}{32}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{7}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{15}{21}}$, т.к. $\frac{35}{21} > \frac{15}{21}$, а $\frac{1}{2} < 1$.

$$437. \text{ a) } 81^{-0,75} + \left(\frac{1}{125}\right)^{-\frac{1}{3}} - \left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{3}{5}} = (3^4)^{-0,75} + (5^{-3})^{\frac{1}{3}} - (2^{-5})^{\frac{3}{5}} = \frac{1}{27} - 3 = -2\frac{26}{27};$$

$$\text{б) } 0,001^{-\frac{1}{3}} - (-2)^{-2} \cdot 64^{\frac{2}{3}} - 8^{-1\frac{1}{3}} + (9^0)^2 = (10^{-3})^{\frac{1}{3}} - 2^{-2} \cdot 2^4 - (2^3)^{-\frac{4}{3}} + 1 = \\ = 10 - 2^2 - 2^{-4} + 1 = 7 - \frac{1}{16} = 6\frac{15}{16}.$$

$$\text{в) } 27^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} - 25^{0,5} = (3^3)^{\frac{2}{3}} + (2^{-4})^{-0,75} - (5^2)^{0,5} = 3^2 + 2^3 - 5 = 12;$$

$$\text{г) } (-0,5)^{-4} - 625^{0,25} - \left(2\frac{1}{4}\right)^{-1\frac{1}{2}} + 19(-3)^{-3} = (2^1)^4 - (5^4)^{0,25} - \\ - (3^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (2^{-2})^{\frac{3}{2}} - 19 \cdot 3^{-3} = 2^4 - 5 - 3^{-3} \cdot 2^3 - \frac{19}{27} = 11 - \frac{8}{27} - \frac{19}{27} = 11 - 1 = 10.$$

438.

$$\text{a) } \frac{a-1}{a^{\frac{3}{4}} + a^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\sqrt{a} + \sqrt[4]{a}}{\sqrt{a} + 1} \cdot a^{\frac{1}{4}} + 1 = \frac{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)}{a^{\frac{3}{4}} + a^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{a^{\frac{3}{4}} + a^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{a} + 1} + 1 = \sqrt{a} - 1 + 1 = \sqrt{a};$$

б)

$$\left(\frac{\sqrt[4]{x^3} - \sqrt[4]{x}}{1 - \sqrt{x}} + \frac{1 + \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{x - \sqrt{x} + 1 - x}{(1 - \sqrt{x})\sqrt[4]{x}}\right)^2 \cdot \left(\frac{x\sqrt{x} + 2x + \sqrt{x}}{x\sqrt{x}}\right)^{-\frac{1}{2}} = \\ = x^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{x + 2\sqrt{x} + 1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{\left((\sqrt{x} + 1)^2\right)^{-\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{x} + 1};$$

$$\text{в) } \frac{a^{\frac{4}{3}} - 27a^{\frac{1}{3}}b}{a^{\frac{2}{3}} + 3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + 9b^{\frac{2}{3}}} : \left(1 - 3\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right) - \sqrt[3]{a^2} = \frac{a^{\frac{1}{3}} \left(a^{\frac{1}{3}} - 3b^{\frac{1}{3}}\right) \left(a^{\frac{2}{3}} + 3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + 9b^{\frac{2}{3}}\right)}{a^{\frac{2}{3}} + 3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + 9b^{\frac{2}{3}}}.$$

$$\cdot \left(\frac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}} - 3b^{\frac{1}{3}}}\right) - \sqrt[3]{a^2} = \frac{a^{\frac{1}{3}} \left(a^{\frac{1}{3}} - 3b^{\frac{1}{3}}\right) \cdot a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}} - 3b^{\frac{1}{3}}} - a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}} = 0;$$

$$\begin{aligned} & \Gamma) \left(\frac{1}{m+\sqrt{2}} - \frac{m^2+4}{m^3+2\sqrt{2}} \right) \cdot \left(\frac{m}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{m} \right) = \left(\frac{m^2-m\sqrt{2}+2-m^2-4}{(m+\sqrt{2})(m^2-m\sqrt{2}+2)} \right) \times \\ & \times \left(\frac{m^2-\sqrt{2}m+2}{2m} \right) = -\frac{\sqrt{2}(m+\sqrt{2}) \cdot (m^2-m\sqrt{2}+2)}{(m+\sqrt{2})(m^2-m\sqrt{2}+2) \cdot 2m} = -\frac{\sqrt{2}}{2m}. \end{aligned}$$

$$439. \text{ а) } \frac{1}{8} \sqrt[7]{2^5 a x^3} = 2^{-3} \cdot 2^{\frac{5}{7}} \cdot a^{\frac{1}{7}} \cdot x^{\frac{3}{7}} = 2^{-2\frac{2}{7}} a^{\frac{1}{7}} x^{\frac{3}{7}};$$

$$\text{б) } \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{a} = a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{3}{4}}; \quad \text{в) } \sqrt[7]{b^3} \cdot \sqrt[4]{b} = b^{\frac{3}{7}} \cdot b^{\frac{1}{4}} = b^{\frac{19}{28}};$$

$$\text{г) } \frac{1}{3} \cdot \sqrt[4]{27\sqrt[3]{x}} = 3^{-1} \cdot 3^{\frac{3}{4}} \cdot x^{\frac{1}{12}} = 3^{-\frac{1}{4}} \cdot x^{\frac{1}{12}}.$$

$$440. \text{ а) } 3 \cdot 5^{-\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{3^5} \cdot \sqrt[5]{2^{-3}} = \sqrt[5]{\frac{243}{8}} = \sqrt[5]{30\frac{3}{8}}; \quad \text{б) } a^{\frac{3}{4}} : b^{\frac{2}{5}} = a^{\frac{15}{20}} \cdot b^{-\frac{8}{20}} = 20\sqrt[20]{\frac{a^{15}}{b^8}};$$

$$\text{в) } 2b^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{b^{-2}} = \sqrt[3]{\frac{8}{b^2}}; \quad \text{г) } b^{\frac{1}{3}} c^{\frac{2}{7}} = b^{\frac{7}{21}} \cdot c^{\frac{6}{21}} = \sqrt[21]{b^7 c^6}.$$

$$441. \text{ а) } (\sqrt{3})^{\frac{5}{6}} = 3^{\frac{5}{12}}, \quad \sqrt[3]{3^{-1} \sqrt[4]{\frac{1}{3}}} = 3^{-\frac{1}{3}} \cdot 3^{-\frac{1}{12}} = 3^{-\frac{5}{12}}; \quad (\sqrt{3})^{\frac{5}{6}} = \sqrt[3]{3^{-1} \sqrt[4]{\frac{1}{3}}};$$

$$\text{б) } 3^{600} = (3^6)^{100} = 729^{100}, \quad 5^{400} = (5^4)^{100} = 625^{100}; \\ 729^{100} > 625^{100}, \quad \text{т.о. } 3^{600} > 5^{400};$$

$$\text{в) } \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{7}} = 2^{\frac{5}{7}}, \quad \sqrt{2} \cdot 2^{\frac{3}{14}} = 2^{\frac{5}{7}}; \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{7}} = \sqrt{2} \cdot 2^{\frac{3}{14}};$$

$$\text{г) } 7^{30} = (7^3)^{10} = 343^{10}, \quad 4^{40} = (4^4)^{10} = 256^{10}; \quad 343^{10} > 256^{10}, \quad \text{т.о. } 7^{30} > 4^{40}.$$

$$442. \text{ а) не имеет смысла, т.к. } a < 0;$$

$$\text{б) } (-2)^{-4} = \frac{1}{(-2)^4} = \frac{1}{16} - \text{выражение имеет смысл};$$

$$\text{в) } 5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25} - \text{выражение имеет смысл};$$

$$\text{г) не имеет смысла, т.к. } x < 0.$$

$$443. \text{ а) } x+1 > 0 \text{ при } x > -1, D\left(y = (x+1)^{\frac{3}{x}}\right) = (-1; \infty);$$

$$\text{б) } x^{\frac{3}{5}} \text{ имеет смысл только при } x \geq 0, D\left(y = x^{\frac{3}{5}}\right) = [0; \infty);$$

в) $x^{-\frac{3}{4}}$ имеет смысл при $x > 0$, $D\left(y = x^{-\frac{3}{4}}\right) = (0; \infty)$;

г) $x - 5 \geq 0$ при $x \geq 5$, $D\left(y = (x - 5)^{\frac{2}{3}}\right) = [5; \infty)$.

444.

а) $\left(a^{\frac{1}{6}}\right)^6 = a$ при $a \geq 0$;

б) $(a^4)^{\frac{1}{4}} = |a| = -a$ при $a \leq 0$;

в) $(a^8)^{\frac{1}{8}} = |a| = \frac{1}{|a|}$ при $a = \pm 1$;

г) $(a^{0,7})^{\frac{3}{7}} = \left(a^{\frac{7}{10}}\right)^{\frac{10}{7}} = a = -a$

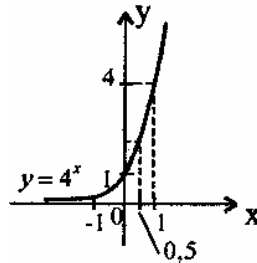
при $a = 0$.

§ 10. Показательная и логарифмическая функции

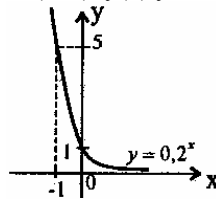
35. Показательная функция

445.

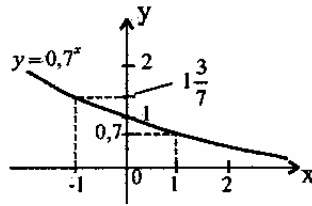
а) $y = 4^x$; $D(y) = \mathbb{R}$, $E(y) = (0; \infty)$, $y(x)$ возрастает на \mathbb{R} ;
 $y(0) = 1$, $y(1) = 4$;



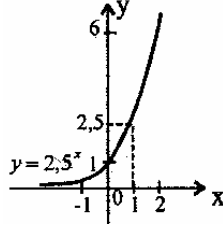
б) $y = 0,2^x$; $D(y) = \mathbb{R}$, $E(y) = (0; \infty)$, $y(x)$ убывает на \mathbb{R} ; $y(-1) = 5$, $y(0) = 1$;



в) $y = 0,7^x$; $D(y) = \mathbb{R}$, $E(y) = (0; \infty)$, $y(x)$ убывает на \mathbb{R} ;
 $y(0) = 1$, $y(1) = 0,7$;



г) $y = 2,5^x$; $D(y) = \mathbb{R}$, $E(y) = (0; \infty)$, $y(x)$ возрастает на \mathbb{R} ;
 $y(0) = 1$, $y(1) = 2,5$.



446. а) $-2^x < 0$ при $x \in \mathbb{R}$: $E(y = -2^x) = (-\infty; 0)$;

б) $\left(\frac{1}{3}\right)^x + 1 > 1$ при $x \in \mathbb{R}$: $E\left(y = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 1\right) = (1; \infty)$;

в) $-\left(\frac{1}{4}\right)^x < 0$ при $x \in \mathbb{R}$: $E\left(y = -\left(\frac{1}{4}\right)^x\right) = (-\infty; 0)$;

г) $5^x - 2 > -2$ при $x \in \mathbb{R}$: $E(y = 5^x - 2) = (-2; \infty)$.

447. а) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-\frac{\sqrt{5}}{2}} = \left(\frac{7}{4}\right)^{\frac{\sqrt{5}}{2}} > 1$ т.к. $\frac{\sqrt{5}}{2} > 0$ и $\left(\frac{7}{4}\right) > 1$;

б) $3^{-\sqrt{12}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{12}} < \left(\frac{1}{3}\right)^{2,8}$, т.к. $\sqrt{12} > 2,8$ и $\left(\frac{1}{3}\right) < 1$;

в) $2,5^{-\sqrt{2}} = 0,4^{\sqrt{2}} < 1$, т.к. $\sqrt{2} > 0$ и $0,4 < 1$;

г) $0,3^{\frac{\sqrt{5}}{6}} < 0,3^{\frac{1}{3}} = 0,3^{\frac{2}{6}}$, т.к. $\sqrt{5} > 2$ и $0,3 < 1$.

448.

а) $\left(\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$; б) $3^{1-2\sqrt{3}} \cdot 9^{1+\sqrt{3}} = 3^{1-2\sqrt{3}} \cdot 3^{2+2\sqrt{3}} = 3^3 = 27$;

в) $8^{\sqrt{2}} : 2^{3\sqrt{2}} = 2^{3\sqrt{2}} : 2^{3\sqrt{2}} = 1$; г) $\left(3^{\sqrt[5]{8}}\right)^{\sqrt[5]{4}} = 3^{\sqrt[5]{32}} = 3^2 = 9$.

$$449. \text{ a) } a^{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{\sqrt{2}-1} = a^{\sqrt{2}} \cdot a^{1-\sqrt{2}} = a; \quad \text{б) } x^{\pi} \cdot \sqrt[4]{x^2} : x^{4\pi} = x^{\pi} \cdot x^{\frac{2-4\pi}{4}} = x^{\frac{1}{2}};$$

$$\text{в) } \left(a^{\sqrt{5}}\right)^{\sqrt{5}} = a^5; \quad \text{г) } y^{\sqrt{2}} \cdot y^{1,3} : \sqrt[3]{y^{3\sqrt{2}}} = y^{\sqrt{2}+1,3-\sqrt{2}} = y^{1,3}.$$

450.

$$\text{a) } \frac{a^{2\sqrt{2}} - b^{2\sqrt{3}}}{\left(a^{\sqrt{2}} - b^{\sqrt{3}}\right)^2} + 1 = \frac{\left(a^{\sqrt{2}} - b^{\sqrt{3}}\right)\left(a^{\sqrt{2}} + b^{\sqrt{3}}\right)}{\left(a^{\sqrt{2}} - b^{\sqrt{3}}\right)^2} + 1 = \frac{a^{\sqrt{2}} + b^{\sqrt{3}} + a^{\sqrt{2}} - b^{\sqrt{3}}}{a^{\sqrt{2}} - b^{\sqrt{3}}} =$$

$$= \frac{2a^{\sqrt{2}}}{a^{\sqrt{2}} - b^{\sqrt{3}}};$$

б)

$$\frac{\left(a^{2\sqrt{3}} - 1\right)\left(a^{2\sqrt{3}} + a^{\sqrt{3}} + a^{3\sqrt{3}}\right)}{a^{4\sqrt{3}} - a^{\sqrt{3}}} = \frac{a^{\sqrt{3}}\left(a^{\sqrt{3}} - 1\right)\left(a^{\sqrt{3}} + 1\right)\left(a^{2\sqrt{3}} + a^{\sqrt{3}} + 1\right)}{a^{\sqrt{3}}\left(a^{3\sqrt{3}} - 1\right)} =$$

$$= \frac{\left(a^{\sqrt{3}} + 1\right)\left(a^{3\sqrt{3}} - 1\right)}{a^{3\sqrt{3}} - 1} = a^{\sqrt{3}} + 1;$$

$$\text{в) } \frac{a^{\sqrt{5}} - b^{\sqrt{7}}}{\frac{2\sqrt{5}}{a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{\sqrt{5}}{3}} b^{\frac{\sqrt{7}}{3}} + b^{\frac{2\sqrt{7}}{3}}} = \frac{\left(\frac{\sqrt{5}}{a^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{\sqrt{7}}{3}}}\right)\left(\frac{2\sqrt{5}}{a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{\sqrt{5}}{3}} b^{\frac{\sqrt{7}}{3}} + b^{\frac{2\sqrt{7}}{3}}}\right)}{\frac{2\sqrt{5}}{a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{\sqrt{5}}{3}} b^{\frac{\sqrt{7}}{3}} + b^{\frac{2\sqrt{7}}{3}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{a^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{\sqrt{7}}{3}}};$$

$$\text{г) } \sqrt{\left(x^{\pi} + y^{\pi}\right)^2 - \left(\frac{1}{4^{\pi}} xy\right)^{\pi}} = \sqrt{x^{2\pi} + 2x^{\pi}y^{\pi} + y^{2\pi} - 4x^{\pi}y^{\pi}} =$$

$$= \sqrt{x^{2\pi} - 2x^{\pi}y^{\pi} + y^{2\pi}} = \sqrt{\left(x^{\pi} - y^{\pi}\right)^2} = \left|x^{\pi} - y^{\pi}\right|.$$

451.

$$\text{a) } 10^{1,41} \approx 25,7; \quad 10^{1,42} \approx 26,3; \quad \text{б) } 10^{1,414} \approx 25,9; \quad 10^{1,415} \approx 26,0;$$

$$\text{в) } 10^{2,23} \approx 169,8; \quad 10^{2,24} \approx 173,8; \quad \text{г) } 10^{2,236} \approx 172,2; \quad 10^{2,237} \approx 172,6.$$

452.

$$1 < \sqrt{2} < 2 \Rightarrow 10 < 10^{\sqrt{2}} < 10^2;$$

$$1,41 < \sqrt{2} < 1,42 \Rightarrow 10^{1,41} < 10^{\sqrt{2}} < 10^{1,42}; \quad 10^{1,41} \approx 25,7 \text{ и } 10^{1,42} \approx 26,3;$$

$$\begin{aligned}
1,414 < \sqrt{2} < 1,415 &\Rightarrow 10^{1,414} < 10^{\sqrt{2}} < 10^{1,415}; \quad 10^{1,414} \approx 25,9 \text{ и } 10^{1,415} \approx 26,0; \\
10^{\sqrt{2}} &\approx 25,9; \quad 2 < \sqrt{5} < 3 \Rightarrow 10^2 < 10^{\sqrt{5}} < 10^3; \\
2,23 < \sqrt{5} < 2,24 &\Rightarrow 10^{2,23} < 10^{\sqrt{5}} < 10^{2,24}; \quad 10^{2,23} \approx 169,8 \text{ и } 10^{2,24} \approx 173,8; \\
2,236 < \sqrt{5} < 2,237 &\Rightarrow 10^{2,236} < 10^{\sqrt{5}} < 10^{2,237}; \quad 10^{2,236} \approx 172,2 \text{ и } \\
10^{2,237} &\approx 172,6; \quad 10^{\sqrt{5}} \approx 172,4.
\end{aligned}$$

453.

$$\text{а) } \sqrt{2} > 1 \Rightarrow y = (\sqrt{2})^x \text{ возрастает на } \mathbb{R}; \quad 0 < \frac{1}{\sqrt{2}} < 1 \Rightarrow y = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x \text{ убывает на } \mathbb{R};$$

$$\text{б) } 0 < \sqrt{5} - 2 < 1 \Rightarrow y = (\sqrt{5} - 2)^x \text{ убывает на } \mathbb{R};$$

$$\frac{1}{\sqrt{5} - 2} > 1 \Rightarrow y = \frac{1}{(\sqrt{5} - 2)^x} \text{ возрастает на } \mathbb{R};$$

$$\text{в) } \frac{\pi}{3} > 1 \Rightarrow y = \left(\frac{\pi}{3}\right)^x \text{ возрастает на } \mathbb{R}; \quad 0 < \frac{3}{\pi} < 1 \Rightarrow y = \left(\frac{3}{\pi}\right)^x \text{ убывает на } \mathbb{R};$$

$$\text{г) } 0 < 3 - \sqrt{7} < 1 \Rightarrow y = (3 - \sqrt{7})^x \text{ убывает на } \mathbb{R};$$

$$\frac{1}{3 - \sqrt{7}} > 1 \Rightarrow y = \frac{1}{(3 - \sqrt{7})^x} \text{ возрастает на } \mathbb{R}.$$

$$\textbf{454. а) } 3^{x+1} - 3 = 3(3^x - 1), \quad 3^x > 0 \text{ при } x \in \mathbb{R} \Rightarrow 3(3^x - 1) > -3 \text{ при } x \in \mathbb{R};$$

$$E(y = 3^{x+1} - 3) = (-3; \infty); \quad \text{б) } y = |2^x - 2| = \begin{cases} 2^x - 2, & x \geq 1, \\ 2 - 2^x, & x < 1. \end{cases} \quad y(1) = 0.$$

$$y(x) \text{ возрастает на } [1; \infty) \text{ и убывает на } (-\infty; 1]; \quad E(y = |2^x - 2|) = [0; \infty);$$

$$\text{в) } \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 2 = 2 \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^x\right), \quad \left(\frac{1}{2}\right)^x > 0 \text{ при } x \in \mathbb{R} \Rightarrow 2 \left(1 + \frac{1}{2^x}\right) > 2 \text{ при } x \in \mathbb{R};$$

$$E \left(y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} + 2 \right) = (2; \infty); \quad \text{г) } y = 4^{|x|} = \begin{cases} 4^x, & x \geq 0, \\ \left(\frac{1}{4}\right)^x, & x < 0; \end{cases} \quad y(0) = 1. \quad y(x) \text{ возрас-}$$

$$\text{тает на } [0; \infty) \text{ и убывает на } (-\infty; 0]; \quad E(y = 4^{|x|}) = [1; \infty).$$

$$\textbf{455. а) } y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sin x}; \quad -1 \leq \sin x \leq 1, \text{ откуда } \left(\frac{1}{2}\right)^{\sin x} \in \left[\frac{1}{2}; 2\right];$$

$$\Rightarrow \min_R y(x) = \frac{1}{2}, \quad \max_R y(x) = 2;$$

$$\text{б) } y = 5 + 3^{|\cos x|}; \quad 0 \leq |\cos x| \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 3^{|\cos x|} \leq 3 \Rightarrow 6 \leq 5 + 3^{|\cos x|} \leq 8;$$

$$\min_R y(x) = 6, \quad \max_R y(x) = 8;$$

$$\text{в) } y = 4^{\cos x}; \quad -1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{4} \leq 4^{\cos x} \leq 4 \Rightarrow \min_R y(x) = \frac{1}{4}, \quad \max_R y(x) = 4;$$

$$\text{г) } y = \left(\frac{1}{3}\right)^{|\sin x|} - 2; \quad 0 \leq |\sin x| \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{3} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{|\sin x|} \leq 1 \Rightarrow -1 \frac{2}{3} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{|\sin x|} - 2 \leq -1;$$

$$\min_R y(x) = -1 \frac{2}{3}, \quad \max_R y(x) = -1.$$

456. а) Т.к. $y = \left(\frac{1}{6}\right)^x$ убывает и $y(x) > 1$ при $x < 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{6}\right)^x = 10$ при $x < 0$;

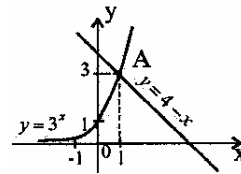
б) т.к. $y = 0,3^x$ убывает и $y(x) < 1$ при $x > 0 \Rightarrow 0,3^x = 0,1$ при $x > 0$;

в) т.к. $y = 10^x$ возрастает и $y(x) > 1$ при $x > 0 \Rightarrow 10^x = 4$ при $x > 0$;

г) $y = 0,7^x$ убывает на \mathbb{R} и $y(x) > 1$ при $x < 0 \Rightarrow 0,7^x = 5$ при $x < 0$.

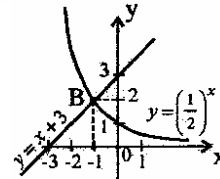
457.

а) $y = 3^x$ возрастает на \mathbb{R} , $y = 4 - x$ убывает на $\mathbb{R} \Rightarrow y$ них не более одной точки пересечения. Очевидно, это точка $A(1;3) \Rightarrow x = 1$.

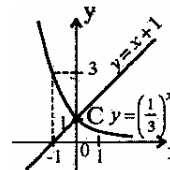


б) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ убывает на \mathbb{R} ,

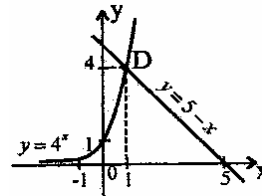
$y = x + 3$ возрастает на \mathbb{R} , графики этих функций могут иметь не более одной точки пересечения. Из рисунка видно, что это точка $B(-1;2)$, значит $x = -1$.



в) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ убывает на \mathbb{R} , $y = x + 1$ возрастает на \mathbb{R} , графики этих функций могут иметь не более одной точки пересечения. Это точка $C(0;1)$, значит $x = 0$.

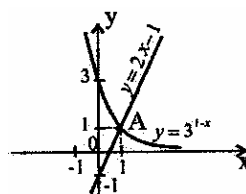


г) $y = 4^x$ возрастает на \mathbb{R} , $y = 5 - x$ убывает на \mathbb{R} , графики этих функций могут иметь не более одной точки пересечения. Это точка $D(1;4)$, значит $x = 1$ единственное решение уравнения $4^x = 5 - x$.

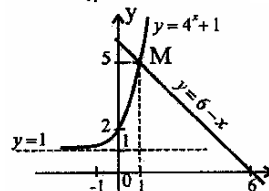


458.

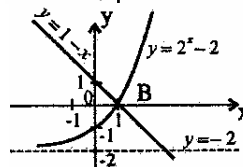
а) $y = 3^{1-x}$ убывает на \mathbb{R} , $y = 2x - 1$ возрастает на \mathbb{R} , графики этих функций могут иметь не более одной точки пересечения. Это точка $A(1;1)$, значит $x = 1$.



б) $y = 4^x + 1$ возрастает на \mathbb{R} , $y = 6 - x$ убывает на \mathbb{R} , графики этих функций могут иметь не более одной точки пересечения. Это точка $M(1;5)$, значит $x = 1$.



в) $y = 2^x - 2$ возрастает на \mathbb{R} , $y = 1 - x$ убывает на \mathbb{R} , графики этих функций могут иметь не более одной точки пересечения. Это точка $B(1;0)$, значит $x = 1$.

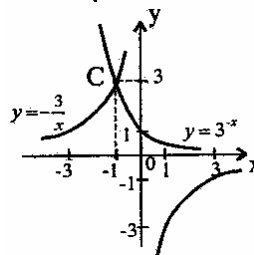


г) при $x \in (-\infty; 0)$ $3^{-x} > 0$, $-\frac{3}{x} > 0$ и $y = 3^{-x}$

убывает, $y = -\frac{3}{x}$ возрастает; при $x \in (0; \infty)$

$3^{-x} > 0$, $-\frac{3}{x} < 0$; следовательно, графики

функций $y = 3^{-x}$ и $y = -\frac{3}{x}$ могут иметь не более одной точки пересечения одной точки пересечения на $(-\infty; 0)$. Это точка $C(-1;3)$, значит $x = -1$.



459.

а) нет; б) нет; в) нет; г) нет.

36. Решение показательных уравнений и неравенств

$$460. \text{ а) } 4^x = 64 \Leftrightarrow 4^x = 4^3 \Leftrightarrow x = 3; \text{ б) } \left(\frac{1}{3}\right)^x = 27 \Leftrightarrow 3^{-x} = 3^3 \Leftrightarrow x = -3;$$

$$\text{ в) } 3^x = 81 \Leftrightarrow 3^x = 3^4 \Leftrightarrow x = 4; \text{ г) } \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{64} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^6 \Leftrightarrow x = 6.$$

$$461. \text{ а) } \left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \Leftrightarrow x = 3;$$

$$\text{ б) } \sqrt{8^{x-3}} = \sqrt[3]{4^{2-x}}; 2^{\frac{3}{2}(x-3)} = 2^{\frac{2}{3}(2-x)}; 9x - 27 = 8 - 4x;$$

$$13x = 35; x = \frac{35}{13} = 2\frac{9}{13};$$

$$\text{ в) } \sqrt{2^x} \cdot \sqrt{3^x} = 36 \Leftrightarrow \sqrt{6^x} = 36 \Leftrightarrow 6^{\frac{x}{2}} = 6^2 \Leftrightarrow x = 4;$$

$$\text{ г) } \left(\frac{3}{7}\right)^{3x+1} = \left(\frac{7}{3}\right)^{5x-3} \Leftrightarrow \left(\frac{7}{3}\right)^{-3x-1} = \left(\frac{7}{3}\right)^{5x-3} \Leftrightarrow -3x-1 = 5x-3 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}.$$

$$462. \text{ а) } 3^{6-x} = 3^{3x-2} \Leftrightarrow 6-x=3x-2 \Leftrightarrow x = 2;$$

$$\text{ б) } \left(\frac{1}{7}\right)^{2x^2+x-0,5} = \frac{\sqrt{7}}{7} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{7}\right)^{2x^2+x-0,5} = \left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 2x^2+x-0,5 = 0,5 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 = 0,5; \end{cases}$$

$$\text{ в) } \sqrt{3^x} = 9 \Leftrightarrow 3^{\frac{x}{2}} = 3^2 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = 2 \Leftrightarrow x = 4;$$

$$\text{ г) } 2^{x^2+2x-0,5} = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow 2^{x^2+2x-0,5} = 2^{2,5} \Leftrightarrow x^2+2x-0,5 = 2,5 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3, \\ x = 1. \end{cases}$$

$$463. \text{ а) } 7^{x+2} + 4 \cdot 7^{x+1} = 539 \Leftrightarrow 11 \cdot 7^{x+1} = 539 \Leftrightarrow 7^{x+1} = 7^2 \Leftrightarrow x = 1.$$

$$\text{ б) } 2 \cdot 3^{x+1} - 3^x = 15 \Leftrightarrow 6 \cdot 3^x - 3^x = 15 \Leftrightarrow 3^x = 3 \Leftrightarrow x = 1.$$

$$\text{ в) } 4^{x+1} + 4^x = 320 \Leftrightarrow 5 \cdot 4^x = 320 \Leftrightarrow 4^x = 4^3 \Leftrightarrow x = 3.$$

$$\text{ г) } 3 \cdot 5^{x+3} + 2 \cdot 5^{x+1} = 77 \Leftrightarrow 75 \cdot 5^{x+1} + 2 \cdot 5^{x+1} = 77 \Leftrightarrow 5^{x+1} = 5^0 \Leftrightarrow x = -1.$$

$$464. \text{ а) } 9^x - 8 \cdot 3^x - 9 = 0 \Leftrightarrow 3^{2x} - 8 \cdot 3^x - 9 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 8t - 9 = 0$$

$$(t = 3^x) \ t > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = -1, \\ t_2 = 9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = -1 - \text{не подходит,} \\ 3^x = 9; \end{cases} \Leftrightarrow 3^x = 9 \Leftrightarrow x = 2;$$

$$\text{ б) } 100^x - 11 \cdot 10^x + 10 = 0 \Leftrightarrow 10^{2x} - 11 \cdot 10^x + 10 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 11t + 10 = 0$$

$$(t = 10^x) \ t > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 1, \\ t_2 = 10; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10^x = 1, \\ 10^x = 10; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 1. \end{cases}$$

$$\text{в)} 36^x - 4 \cdot 6^x - 12 = 0 \Leftrightarrow 6^{2x} - 4 \cdot 6^x - 12 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 4t - 12 = 0$$

$$(t = 6^x) \ t > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = -2, \\ t_2 = 6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6^x = -2 - \text{не подходит,} \\ 6^x = 6; \end{cases} \Leftrightarrow 6^x = 6 \Leftrightarrow x = 1;$$

$$\text{г)} 49^x - 8 \cdot 7^x + 7 = 0 \Leftrightarrow 7^{2x} - 8 \cdot 7^x + 7 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 8t + 7 = 0$$

$$(t = 7^x) \ t > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 1, \\ t_2 = 7; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7^x = 1, \\ 7^x = 7; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 1. \end{cases}$$

$$\mathbf{465. \text{ а)} } \begin{cases} 4^{x+y} = 16, \\ 4^{x+2y-1} = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4^{x+y} = 4^2, \\ 4^{x+2y-1} = 4^0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2, \\ x+2y=1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-y, \\ y=-1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3, \\ y=-1. \end{cases}$$

$$\text{б)} \begin{cases} 6^{3x-y} = \sqrt{6}, \\ 2^{y-2x} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6^{3x-y} = 6^{0,5}, \\ 2^{y-2x} = 2^{-0,5}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-y=0,5, \\ y-2x=-0,5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3x-0,5, \\ x=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0, \\ y=-0,5. \end{cases}$$

$$\text{в)} \begin{cases} 3^{2y-x} = \frac{1}{81}, \\ 3^{x-y+2} = 27; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{2y-x} = 3^{-4}, \\ 3^{x-y+2} = 3^3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y-x=-4, \\ x-y+2=3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-3, \\ x=y+1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2, \\ y=-3. \end{cases}$$

$$\text{г)} \begin{cases} \left(\frac{1}{5}\right)^{4x-y} = 25, \\ 7^{9x-y} = \sqrt{7}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5^{y-4x} = 5^2, \\ 7^{9x-y} = 7^{0,5}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-4x=2, \\ 9x-y=0,5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x=2,5, \\ y=4x+2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0,5, \\ y=4. \end{cases}$$

$$\mathbf{466. \text{ а)} } \left(\frac{1}{3}\right)^x \geq 27 \Leftrightarrow 3^{-x} \geq 3^3 \Leftrightarrow -x \geq 3 \Leftrightarrow x \leq -3;$$

$$\text{б)} (\sqrt{6})^x \leq \frac{1}{36} \Leftrightarrow 6^{\frac{x}{2}} \leq 6^{-2} \Leftrightarrow \frac{x}{2} \leq -2 \Leftrightarrow x \leq -4;$$

$$\text{в)} 0,2^x \leq \frac{1}{25} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^x \leq \left(\frac{1}{5}\right)^2 \Leftrightarrow x \geq 2;$$

$$\text{г)} (1,5)^x < 2,25 \Leftrightarrow (1,5)^x < 1,5^2 \Leftrightarrow x < 2.$$

$$\mathbf{467. \text{ а)} } 4^{5-2x} \leq 0,25 \Leftrightarrow 4^{5-2x} \leq 4^{-1} \Leftrightarrow 5-2x \leq -1 \Leftrightarrow x \geq 3;$$

$$\text{б)} 0,3^{7+4x} > 0,027 \Leftrightarrow 0,3^{7+4x} > 0,3^3 \Leftrightarrow 7+4x < 3 \Leftrightarrow x < -1;$$

$$\text{в)} 0,4^{2x+1} > 0,16 \Leftrightarrow 0,4^{2x+1} > 0,4^2 \Leftrightarrow 2x+1 < 2 \Leftrightarrow x < 0,5;$$

$$\text{г)} 3^{2-x} < 27 \Leftrightarrow 3^{2-x} < 3^3 \Leftrightarrow 2-x < 3 \Leftrightarrow x > -1.$$

468.

$$\text{а)} 3^{x+1} - 2 \cdot 3^{x-2} = 75 \Leftrightarrow 3 \cdot 3^x - \frac{2}{9} \cdot 3^x = 75 \Leftrightarrow 2\frac{7}{9} \cdot 3^x = 75 \Leftrightarrow 3^x = 27 \Leftrightarrow x = 3;$$

$$\text{б)} \left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} - \left(\frac{1}{5}\right)^{x+1} = 4,8 \Leftrightarrow 5 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x - \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x = 4,8 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^x \cdot 4\frac{4}{5} = 4,8 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^x = 1 \Leftrightarrow x = 0;$$

$$\begin{aligned} \text{в)} 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} &= 162 \Leftrightarrow 40 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + 0,5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x = 162 \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot 40,5 = 162 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = 4 \Leftrightarrow x = -2; \end{aligned}$$

$$\text{г)} 5 \cdot 9^x + 9^{x-2} = 406 \Leftrightarrow 5 \cdot 9^x + \frac{1}{81} \cdot 9^x = 406 \Leftrightarrow 9^x \cdot 5 \frac{1}{81} = 406 \Leftrightarrow 9^x = 81 \Leftrightarrow x = 2.$$

469. Т.к. функция $a^x > 0$, то мы имеем право делить уравнение на нее.

$$\text{а)} 2^{x-2} = 3^{x-2} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} = 1 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2;$$

$$\text{б)} \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} = \left(\frac{1}{4}\right)^{1-x} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} = 4^{x-1} \Leftrightarrow 12^{x-1} = 1 \Leftrightarrow x = 1;$$

$$\text{в)} 5^{x+1} = 8^{x+1} \Leftrightarrow \left(\frac{8}{5}\right)^{x+1} = 1 \Leftrightarrow x = -1;$$

$$\text{г)} 7^{x-2} = 4^{2-x} \Leftrightarrow (28)^{x-2} = 1 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

$$\textbf{470. а)} 3^x + 3^{3-x} = 12 \Leftrightarrow 3^x + 27 \cdot 3^{-x} = 12 \Leftrightarrow t^2 - 12t + 27 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 3, \\ t = 9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = 3, \\ 3^x = 9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 2. \end{cases}$$

$$\text{б)} 4^{\sqrt{x-2}} + 16 = 10 \cdot 2^{\sqrt{x-2}} \Leftrightarrow 2^{2\sqrt{x-2}} - 10 \cdot 2^{\sqrt{x-2}} + 16 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 10t + 16 = 0$$

$$\left(t = 2^{\sqrt{x-2}}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2, \\ t = 8; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{\sqrt{x-2}} = 2, \\ 2^{\sqrt{x-2}} = 8; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-2} = 1, \\ \sqrt{x-2} = 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, \\ x = 11. \end{cases}$$

$$\text{в)} \left(\frac{1}{5}\right)^{1-x} - \left(\frac{1}{5}\right)^x = 4,96 \Leftrightarrow 0,2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-x} - \left(\frac{1}{5}\right)^x = 4,96$$

$$\left(t = \left(\frac{1}{5}\right)^x\right) t > 0 \Leftrightarrow t^2 + 4,96t - 0,2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -5 - \text{не подходит} \\ t = 0,04 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^x = \left(\frac{1}{5}\right)^2 \Leftrightarrow x = 2.$$

$$\text{г)} 4^x - 0,25^{x-2} = 15 \Leftrightarrow 4^x - 16 \cdot 4^{-x} = 15t \left(t = 4^x\right) \Leftrightarrow t > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 15t - 16 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 - \text{не подходит}, \\ t = 16; \end{cases} \Leftrightarrow 4^x = 4^2 \Leftrightarrow x = 2.$$

471.

$$\text{а)} \begin{cases} 5^{x+y} = 125, \\ 4^{(x-y)^2-1} = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3, \\ (x - y)^2 - 1 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - x, \\ (2x - 3)^2 - 1 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - x, \\ 2x - 3 = \pm 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - x, \\ \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 2; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = 2; \\ x_2 = 2, \\ y_2 = 1. \end{cases}$$

$$\text{б)} \begin{cases} x + y = 5, \\ 4^x + 4^y = 80; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 - x, \\ 4^x + 4^{5-x} = 80; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 - x, \\ 4^{2x} - 80 \cdot 4^x + 1024 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 - x, \\ 4^x = 64, \\ 4^x = 16; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 - x, \\ \begin{cases} x_1 = 3, \\ x_2 = 2; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3, \\ y_1 = 2; \\ x_2 = 2, \\ y_2 = 3. \end{cases}$$

$$\text{в)} \begin{cases} 3^x + 3^y = 12, \\ 6^{x+y} = 216; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - x, \\ 3^x + 27 \cdot 3^{-x} = 12; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - x, \\ 3^{2x} - 12 \cdot 3^x + 27 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - x, \\ \begin{cases} 3^x = 3, \\ 3^x = 9; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - x, \\ \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 2; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = 2; \\ x_2 = 2, \\ y_2 = 1. \end{cases}$$

$$\text{г)} \begin{cases} 4^{x+y} = 128, \\ 5^{3x-2y-3} = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{2(x+y)} = 2^7, \\ 3x - 2y = 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 7, \\ 3x - 2y = 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 7, \\ 5x = 10; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = 1,5. \end{cases}$$

$$\text{472. а)} 2^{x^2} > \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-3} \Leftrightarrow 2^{x^2} > 2^{3-2x} \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -3, \\ x > 1. \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty; -3) \cup (1; \infty)$.

$$\text{б)} \left(\frac{1}{25}\right)^{2x} < (\sqrt{5})^{x^2+3,75} \Leftrightarrow 5^{-4x} < 5^{\frac{x^2+3,75}{2}} \Leftrightarrow -4x < \frac{x^2+3,75}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 8x + 3,75 > 0. \quad x \in (-\infty; -7,5) \cup (-0,5; +\infty).$$

Ответ: $[-3; -1]$.

$$\text{в)} 3^{4x+3} \leq \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{x^2}{2}} \Leftrightarrow 3^{4x+3} \leq 3^{-x^2} \Leftrightarrow x^2 + 4x + 3 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3, \\ x \leq -1. \end{cases}$$

$$\text{г)} \left(\frac{1}{4}\right)^{10x} < 64^{\frac{2}{3}-x^2} \Leftrightarrow 4^{-10x} > 4^{8-3x^2} \Leftrightarrow 3x^2 - 10x - 8 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{2}{3}, \\ x > 4. \end{cases} \quad \text{Ответ: } \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup (4; \infty).$$

473.

$$a) \left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} > 2,5 \Leftrightarrow 2,5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x > 2,5 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x > 1 \Leftrightarrow x < 0;$$

$$б) 2^{2x-1} + 2^{2x-2} + 2^{2x-3} < 448 \Leftrightarrow \frac{7}{8} \cdot 2^{2x} < 448 \Leftrightarrow 4^x < 64 \cdot 8 \Leftrightarrow 4^x < 4^{4,5} \Leftrightarrow x < 4,5.$$

$$в) \left(\frac{4}{3}\right)^{x+1} - \left(\frac{4}{3}\right)^x > \frac{3}{16} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \left(\frac{4}{3}\right)^x > \frac{3}{16} \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^x > \frac{9}{16} \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^x > \left(\frac{4}{3}\right)^{-2} \Leftrightarrow x > -2.$$

$$г) 3^{x+2} + 3^{x-1} < 28 \Leftrightarrow \frac{28}{3} \cdot 3^x < 28 \Leftrightarrow 3^x < 3 \Leftrightarrow x < 1.$$

474. а) $\pi^x - \pi^{2x} \geq 0 \Leftrightarrow \pi^x(1 - \pi^x) \geq 0$, т.к. $\pi^x > 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \pi^x \geq 0, \\ 1 - \pi^x \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \pi^x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 0;$$

$$б) \left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1} - 10 \cdot 3^{-x} + 3 < 0 \Leftrightarrow 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} - 10 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x + 3 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^x > \frac{1}{3}, \\ \left(\frac{1}{3}\right)^x < 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1, \\ x > -1; \end{cases} \quad x \in (-1; 1);$$

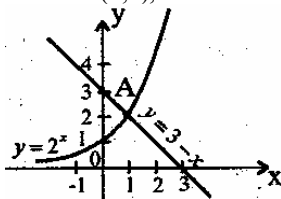
$$в) 4^x - 2^{x+1} - 8 > 0 \Leftrightarrow 2^{2x} - 2 \cdot 2^x - 8 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x > 4, \\ 2^x < -2; \end{cases} \Leftrightarrow x > 2.$$

$$г) \left(\frac{1}{36}\right)^x - 5 \cdot 6^{-x} - 6 \leq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{6}\right)^{2x} - 5 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^x - 6 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{1}{6}\right)^x \geq -1, \\ \left(\frac{1}{6}\right)^x \leq 6; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{6}\right)^x \leq \left(\frac{1}{6}\right)^{-1} \Leftrightarrow x \geq -1.$$

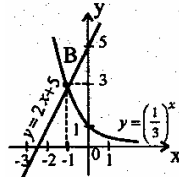
475.

а) $2^x \leq 3 - x$; т.к. $y = 2^x$ возрастает, а $y = 3 - x$ убывает, следовательно, у них одна точка пересечения $A(1;2)$, и $2^x \leq 3 - x$ при $x \leq 1$;



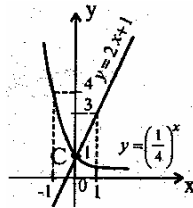
б) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \leq 2x + 5$; т.к. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ – убывает, а $y = 2x + 5$ – возрастает, то они

пересекаются только в одной точке $B(-1; 3)$, и $\left(\frac{1}{3}\right)^x \leq 2x + 5$ при $x \geq -1$;

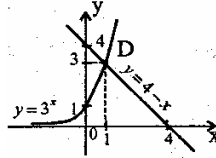


в) $\left(\frac{1}{4}\right)^x \geq 2x + 1$; т.к. $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ – убывает, а $y = 2x + 1$ – возрастает, то они

пересекаются только в одной точке $C(0; 1)$, и $\left(\frac{1}{4}\right)^x \geq 2x + 1$ при $x \leq 0$;



г) $3^x \geq 4 - x$; т.к. $y = 3^x$ – возрастает, а $y = 4 - x$ – убывает, то они пересекаются только в одной точке $D(1; 3)$, $3^x \geq 4 - x$ при $x \geq 1$.



37. Логарифмы и их свойства

476.

а) $\log_3 9 = 2$; б) $\log_2 \frac{1}{8} = -3$; в) $\log_4 16 = 2$; г) $\log_5 \frac{1}{25} = -2$.

477.

а) $\log_9 3 = \frac{1}{2}$; б) $\log_7 1 = 0$; в) $\log_{32} 2 = \frac{1}{5}$; г) $\log_3 \frac{1}{3} = -1$.

478.

а) $\log_{27} 9 = \frac{2}{3}$; б) $\log_{32} 8 = \frac{3}{5}$; в) $\log_{81} 27 = \frac{3}{4}$; г) $\log_{125} 25 = \frac{2}{3}$.

479.

a) $\log_3 \frac{1}{81} = -4, 3^{-4} = \frac{1}{81};$

б) $\log_{16} 1 = 0, 16^0 = 1;$

в) $\log_4 16 = 2, 4^2 = 16;$

г) $\log_5 125 = 3, 5^3 = 125.$

480.

a) $\log_5 0,04 = -2, 5^{-2} = 0,04;$

б) $\log_7 343 = 3, 7^3 = 343;$

в) $\lg 0,01 = -2, 10^{-2} = 0,01;$

г) $\log_3 \frac{1}{243} = -5, 3^{-5} = \frac{1}{243}.$

481.

a) $\log_{\sqrt{2}} 8 = 6, (\sqrt{2})^6 = 8;$

б) $\log_{\sqrt{\frac{1}{3}}} 27 = -6, \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-6} = 27;$

в) $\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2, \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 9;$

г) $\log_{0,5} 4 = -2, 0,5^{-2} = 4.$

482. a) $\log_{2\sqrt{2}} 128 = \frac{14}{3}, (2\sqrt{2})^{\frac{14}{3}} = \left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{14}{3}} = 128;$

б) $\log_{0,2} 0,008 = 3, 0,2^3 = 0,008;$

в) $\log_{\sqrt{5}} 0,2 = -2, (\sqrt{5})^{-2} = 0,2; \quad \text{г) } \log_{0,2} 125 = -3, 0,2^{-3} = 5^3 = 125.$

483.

a) $\log_5 25 = 2, \log_5 \frac{1}{5} = -1, \log_5 \sqrt{5} = \frac{1}{2}; \quad \text{б) } \log_8 64 = 2, \log_8 \frac{1}{8} = -1, \log_8 2 = \frac{1}{3};$

в) $\log_2 16 = 4, \log_2 \frac{1}{4} = -2, \log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2};$

г) $\log_3 27 = 3, \log_3 \frac{1}{9} = -2, \log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2}.$

484.

a) $\log_3 x = -1, x = 3^{-1} = \frac{1}{3};$

б) $\log_{\frac{1}{6}} x = -3, x = \left(\frac{1}{6}\right)^{-3} = 6^3 = 216;$

в) $\log_5 x = 2, x = 5^2 = 125;$

г) $\log_7 x = -2, x = 7^{-2} = \frac{1}{49}.$

485.

a) $\log_4 x = -3, x = 4^{-3} = \frac{1}{64};$

б) $\log_{\sqrt{5}} x = 0, x = (\sqrt{5})^0 = 1;$

в) $\log_{\frac{1}{7}} x = 1, x = \left(\frac{1}{7}\right)^1 = \frac{1}{7};$

г) $\log_{\frac{1}{2}} x = -3, x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8.$

486. а) $\log_x 81 = 4$, $x^4 = 3^4$, $x = 3$; б) $\log_x \frac{1}{16} = 2$, $x^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2$, $x = \frac{1}{4}$;
в) $\log_x \frac{1}{4} = -2$, $x^{-2} = 2^{-2}$, $x = 2$; г) $\log_x 27 = 3$, $x^3 = 3^3$, $x = 3$.

487. а) $\log_4 x = 2$, $x = 4^2 = 16$; $\log_4 16 = 2$; $\log_4 x = \frac{1}{2}$, $x = 4^{\frac{1}{2}} = 2$; $\log_4 2 = \frac{1}{2}$;
 $\log_4 x = 1$, $x = 4^1 = 4$; $\log_4 4 = 1$; $\log_4 x = 0$, $x = 4^0 = 1$; $\log_4 1 = 0$;
б) $\log_3 x = 3$, $x = 3^3 = 27$; $\log_3 27 = 3$; $\log_3 x = -1$, $x = 3^{-1} = \frac{1}{3}$; $\log_3 \frac{1}{3} = -1$;
 $\log_3 x = -3$, $x = 3^{-3} = \frac{1}{27}$; $\log_3 \frac{1}{27} = -3$; $\log_3 x = 1$, $x = 3^1 = 3$; $\log_3 3 = 1$;
в) $\log_2 x = 3$, $x = 2^3 = 8$; $\log_2 8 = 3$; $\log_2 x = \frac{1}{2}$, $x = \sqrt{2}$; $\log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$;
 $\log_2 x = 0$, $x = 2^0 = 1$; $\log_2 1 = 0$; $\log_2 x = -1$, $x = 2^{-1} = \frac{1}{2}$; $\log_2 \frac{1}{2} = -1$;
г) $\log_5 x = 1$, $x = 5^1 = 5$; $\log_5 5 = 1$; $\log_5 x = -2$, $x = 5^{-2} = \frac{1}{25}$; $\log_5 \frac{1}{25} = -2$;
 $\log_5 x = 0$, $x = 5^0 = 1$; $\log_5 1 = 0$; $\log_5 x = 3$, $x = 5^3 = 125$; $\log_5 125 = 3$.

488.

а) $1,7^{\log_{1,7} 2} = 2$; б) $\pi^{\log_{\pi} 5,2} = 5,2$; в) $2^{\log_2 5} = 5$; г) $3,8^{\log_{3,8} 11} = 11$.

489.

а) $5^{1+\log_5 3} = 5 \cdot 5^{\log_5 3} = 5 \cdot 3 = 15$; б) $10^{1-\lg 2} = \frac{10}{10^{\lg 2}} = \frac{10}{2} = 5$;
в) $\left(\frac{1}{7}\right)^{1+\log_7 2} = \frac{1}{7} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^{\log_7 2} = \frac{1}{7} \cdot 2 = \frac{2}{7}$; г) $3^{2-\log_3 18} = \frac{9}{3^{\log_3 18}} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$.

490.

а) $4^{2\log_4 3} = \left(4^{\log_4 3}\right)^2 = 3^2 = 9$; б) $5^{-3\log_5 \frac{1}{2}} = 5^{\log_5 \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$;
в) $\left(\frac{1}{2}\right)^{4\log_2 3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 3^4} = 3^4 = 81$; г) $6^{-2\log_6 5} = 6^{\log_6 5^{-2}} = 5^{-2} = \frac{1}{25}$.

491. а) $\log_3 \left(\sqrt[5]{a^3 b}\right)^{\frac{2}{3}} = \log_3 \left(a^{\frac{2}{5}} b^{\frac{2}{15}}\right) = \log_3 a^{\frac{2}{5}} + \log_3 b^{\frac{2}{15}} = \frac{2}{5} \log_3 a + \frac{2}{15} \log_3 b =$
 $= \frac{2}{5} \left(\log_3 a + \frac{\log_3 b}{3}\right);$

$$\text{б)} \log_3 \left(\frac{a^{10}}{\sqrt[6]{b^5}} \right)^{-0,2} = \log_3 \left(a^{-2} \cdot b^{\frac{1}{6}} \right) = \log_3 a^{-2} + \log_3 b^{\frac{1}{6}} = -2 \log_3 a + \frac{1}{6} \log_3 b;$$

$$\text{в)} \log_3 (9a^4 \sqrt[5]{b}) = \log_3 9 + \log_3 a^4 + \log_3 b^{\frac{1}{5}} = 2 + 4 \log_3 a + \frac{1}{5} \log_3 b;$$

$$\text{г)} \log_3 \frac{b^2}{27a^7} = \log_3 b^2 - \log_3 27 - \log_3 a^7 = 2 \log_3 b - 3 - 7 \log_3 a.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{492.} \text{ а)} \lg(100\sqrt{ab^3c}) &= \lg 100 + \lg a^{\frac{1}{2}} + \lg b^{\frac{3}{2}} + \lg c^{\frac{1}{2}} = 2 + \frac{1}{2} \lg a + \frac{3}{2} \lg b + \frac{1}{2} \lg c = \\ &= 2 + \frac{1}{2} \lg(ac) + \frac{3}{2} \lg b; \end{aligned}$$

$$\text{б)} \lg \left(\frac{a^5}{0,1c^2\sqrt{b}} \right) = \lg a^5 - \lg 0,1 - \lg c^2 - \lg b^{\frac{1}{2}} = 5 \lg a + 1 - 2 \lg c - \frac{1}{2} \lg b;$$

$$\text{в)} \lg \left(\sqrt[3]{10a^{\frac{1}{3}}b^4c^{-\frac{1}{2}}} \right) = \lg 10^{\frac{1}{3}} + \lg a^{\frac{1}{3}} + \lg b^{\frac{4}{3}} + \lg c^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \lg a + 4 \lg b - \frac{1}{2} \lg c;$$

$$\text{г)} \lg \frac{0,01c^{\frac{2}{3}}}{\frac{1}{a^2b^3}} = \lg 0,01 + \lg c^{\frac{2}{3}} - \lg a^{\frac{1}{2}} - \lg b^3 = -2 + \frac{2}{3} \lg c - \frac{1}{2} \lg a - 3 \lg b.$$

$$\mathbf{493.} \text{ а)} \lg \left(10^3 a^4 b^{\frac{1}{2}} c^{-3} \right) = \lg 10^3 + \lg a^4 + \lg b^{\frac{1}{2}} + \lg c^{-3} = 3 + 4 \lg a + \frac{1}{2} \lg b - 3 \lg c;$$

$$\text{б)} \lg \frac{b^{\frac{2}{3}}}{10^5 a^6 c^5} = \lg b^{\frac{2}{3}} - \lg 10^5 - \lg a^6 - \lg c^5 = \frac{2}{3} \lg b - 5 - 6 \lg a - 5 \lg c;$$

$$\text{в)} \lg \left(10^{-4} a^2 b^5 c^{\frac{2}{3}} \right) = \lg 10^{-4} + \lg a^2 + \lg b^5 + \lg c^{\frac{2}{3}} = -4 + 2 \lg a + 5 \lg b + \frac{2}{3} \lg c;$$

$$\text{г)} \lg \left(\frac{c^{\frac{7}{4}}}{10^7 a^{\frac{2}{3}} b^8} \right) = \lg c^{\frac{7}{4}} - \lg 10^7 - \lg a^{\frac{2}{3}} - \lg b^8 = \frac{7}{4} \lg c - 7 - \frac{2}{3} \lg a - 8 \lg b.$$

$$\mathbf{494.} \text{ а)} \log_5 72 = \log_5 8 + \log_5 9 = 3 \log_5 2 + 2 \log_5 3 = 3a + 2b;$$

$$\text{б)} \log_5 15 = \log_5 5 + \log_5 3 = 1 + b;$$

$$\text{в)} \log_5 12 = \log_5 2^2 + \log_5 3 = 2 \log_5 2 + \log_5 3 = 2a + b;$$

$$\text{г)} \log_5 30 = \log_5 2 + \log_5 3 + \log_5 5 = a + b + 1.$$

$$495. \text{ a) } \lg 8 + \lg 125 = \lg(8 \cdot 125) = \lg 10^3 = 3; \text{ б) } \log_2 7 - \log_2 \frac{7}{16} = \log_2 2^4 = 4;$$

$$\text{в) } \log_{12} 4 + \log_{12} 36 = \log_{12} 12^2 = 2; \text{ г) } \lg 13 - \lg 130 = \lg 10^{-1} = -1.$$

$$496. \text{ а) } \frac{\lg 8 + \lg 18}{2 \lg 2 + \lg 3} = \frac{\lg 144}{\lg 12} = \frac{2 \lg 12}{\lg 12} = 2; \quad \text{б) } \frac{\log_3 16}{\log_3 4} = \frac{2 \log_3 4}{\log_3 4} = 2;$$

$$\text{в) } \log_2 11 - \log_2 44 = \log_2 \frac{1}{4} = -2;$$

$$\text{г) } \log_{0,3} 9 - 2 \log_{0,3} 10 = \log_{0,3} \frac{9}{100} = \log_{0,3} 0,3^2 = 2.$$

$$497. \text{ а) } 3 \log_6 2 + 0,5 \log_6 25 - 2 \log_6 3 = \log_6 8 + \log_6 5 - \log_6 9 = \log_6 \frac{40}{9};$$

$$\log_6 x = \log_6 \frac{40}{9}, x = 4 \frac{4}{9};$$

$$\text{б) } \frac{1}{2} \lg 5a - 3 \lg b + 4 \lg c = \lg(5a)^{\frac{1}{2}} - \lg b^3 + \lg c^4 = \lg \left(\frac{(5a)^{\frac{1}{2}} \cdot c^4}{b^3} \right);$$

$$\lg x = \lg \left(\frac{(5a)^{\frac{1}{2}} \cdot c^4}{b^3} \right), x = \frac{(5a)^{\frac{1}{2}} \cdot c^4}{b^3};$$

$$\text{в) } 5 \lg m + \frac{2}{3} \lg n - \frac{1}{4} \lg p = \lg m^5 + \lg n^{\frac{2}{3}} - \lg p^{\frac{1}{4}} = \lg \left(\frac{m^5 \cdot n^{\frac{2}{3}}}{p^{\frac{1}{4}}} \right);$$

$$\lg x = \lg \left(\frac{m^5 n^{\frac{2}{3}}}{p^{\frac{1}{4}}} \right), x = \frac{m^5 n^{\frac{2}{3}}}{p^{\frac{1}{4}}};$$

$$\begin{aligned} \text{г) } \frac{1}{4} \log_4 216 - 2 \log_4 10 + 4 \log_4 3 &= \log_4 6 - \log_4 100 + \log_4 81 = \\ &= \log_4 \left(\frac{6 \cdot 81}{100} \right) = \log_4 4,86; \log_4 x = \log_4 4,86, x = 4,86. \end{aligned}$$

498.

$$\text{а) } \log_{\frac{1}{2}} 3 + \log_3 \frac{1}{2} + 2 = \frac{\log_3 3}{\log_3 \frac{1}{2}} + \log_3 \frac{1}{2} + 2 = \frac{\left(\log_3 \frac{1}{2} \right)^2 + 2 \log_3 \frac{1}{2} + 1}{\log_3 \frac{1}{2}} =$$

$$= -\frac{\left(\log_3 \frac{1}{2} + 1\right)^2}{\log_3 2} < 0, \text{ откуда } \log_{\frac{1}{2}} 3 + \log_3 \frac{1}{2} < -2;$$

$$\text{б)} 4^{\log_5 7} = \left(5^{\log_5 4}\right)^{\log_5 7} = \left(5^{\log_5 7}\right)^{\log_5 4} = 7^{\log_5 4};$$

$$\text{в)} \log_3 7 + \log_7 3 - 2 = \log_3 7 + \frac{\log_3 3}{\log_3 7} - 2 = \frac{(\log_3 7)^2 - 2 \log_3 7 + 1}{\log_3 7} =$$

$$= \frac{(\log_3 7 - 1)^2}{\log_3 7} > 0, \text{ откуда } \log_3 7 + \log_7 3 > 2;$$

$$\text{г)} 3^{\log_2 5} = \left(2^{\log_2 3}\right)^{\log_2 5} = \left(2^{\log_2 5}\right)^{\log_2 3} = 5^{\log_2 3}.$$

38. Логарифмическая функция

$$499. \text{ а)} 10 - 5x > 0 \Leftrightarrow x < 2; D(y) = (-\infty; 2);$$

$$\text{б)} 9 - x^2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > -3, \\ x < 3; \end{cases} D(y) = (-3; 3);$$

$$\text{в)} x - 4 > 0 \Leftrightarrow x > 4; D(y) = (4; \infty);$$

$$\text{г)} x^2 - 16 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4, \\ x < -4; \end{cases} D(y) = (-\infty; -4) \cup (4; \infty).$$

500.

$$\text{а)} 6 + x - x^2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2, \\ x < 3; \end{cases} D(y) = (-2; 3);$$

$$\text{б)} \quad \begin{array}{ccccccc} & + & & - & & + & \\ & \circ & & \circ & & & \\ & -2,5 & & 1 & & & \end{array} \quad X$$

$$\frac{2x+5}{x-1} > 0; D(y) = (-\infty; -2,5) \cup (1; \infty);$$

$$\text{в)} \quad \begin{array}{ccccccc} & + & & - & & + & \\ & \circ & & \circ & & & \\ & -\frac{2}{3} & & 2,5 & & & \end{array} \quad X$$

$$\frac{2+3x}{5-2x} > 0 \Leftrightarrow \frac{2+3x}{2x-5} < 0; D(y) = \left(-\frac{2}{3}; 2,5\right);$$

$$\text{г)} x^2 - 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1, \\ x > 3. \end{cases} D(y) = (-\infty; -1) \cup (3; \infty).$$

$$501. \text{ а)} \log_2 3,8 < \log_2 4,7, \text{ т.к. } 3,8 < 4,7 \text{ и } 2 > 1;$$

$$\text{б)} \log_{\frac{1}{3}} 0,15 > \log_{\frac{1}{3}} 0,2, \text{ т.к. } 0,15 < 0,2 \text{ и } \frac{1}{3} < 1;$$

$$\text{в)} \log_3 5,1 > \log_3 4,9, \text{ т.к. } 5,1 > 4,9 \text{ и } 3 > 1;$$

$$\text{г)} \log_{0,2} 1,8 > \log_{0,2} 2,1, \text{ т.к. } 1,8 < 2,1 \text{ и } 0,2 < 1.$$

502. а) $\log_{\sqrt{2}} 3 > 1 = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{2}$ т.к. $3 > \sqrt{2}$ и $\sqrt{2} > 1$;

б) $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} 1,9 > \log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} 2,5$, т.к. $1,9 < 2,5$ и $\frac{1}{\sqrt{3}} < 1$;

в) $\log_{\pi} 2,9 < 1 = \log_{\pi} \pi$, т.к. $2,9 < \pi$ и $\pi > 1$;

г) $\log_{0,7} \sqrt{2} < \log_{0,7} 0,3$, т.к. $\sqrt{2} > 0,3$ и $0,7 < 1$.

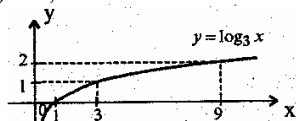
503. а) $\log_2 10 > \log_2 8 = 3$, $\log_5 30 < \log_5 125 = 3 \Rightarrow \log_2 10 > \log_5 30$;

б) $\log_{0,3} 2 < \log_{0,3} \sqrt{0,3} = \frac{1}{2}$, $\log_5 3 > \log_5 \sqrt{5} = \frac{1}{2} \Rightarrow \log_{0,3} 2 < \log_5 3$;

в) $\log_3 5 > \log_3 3 = 1$, $\log_7 4 < \log_7 7 = 1 \Rightarrow \log_3 5 > \log_7 4$;

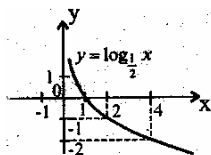
г) $\log_3 10 > \log_3 9 = 2$, $\log_8 57 < \log_8 64 = 2 \Rightarrow \log_3 10 > \log_8 57$.

504. а) $y = \log_3 x$; $D(y) = (0; \infty)$, $E(y) = \mathbb{R}$, $y(x)$ возрастает на $(0; \infty)$;
 $y(1) = 0$, $y(3) = 1$, $y(9) = 2$;

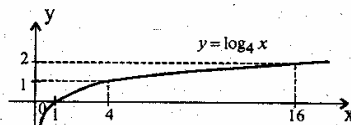


б) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$; $D(y) = (0; \infty)$, $E(y) = \mathbb{R}$, $y(x)$ убывает на $(0; \infty)$;

$y\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, $y(1) = 0$, $y(2) = -1$;

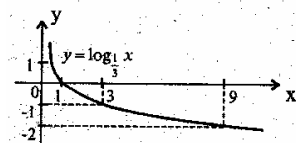


в) $y = \log_4 x$; $D(y) = (0; \infty)$, $E(y) = \mathbb{R}$, $y(x)$ возрастает на $(0; \infty)$;
 $y(1) = 0$, $y(4) = 1$, $y(16) = 2$;



г) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$; $D(y) = (0; \infty)$, $E(y) = \mathbb{R}$, $y(x)$ убывает на $(0; \infty)$;

$y\left(\frac{1}{3}\right) = 1$, $y(1) = 0$, $y(3) = -1$, $y(9) = -2$.



505. а) $\sin x > 0$ при $2\pi k < x < \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $D(y) = (2\pi k; \pi + 2\pi k / k \in \mathbb{Z})$;

б) $2^x - 1 > 0 \Leftrightarrow 2^x > 2^0 \Leftrightarrow x > 0$; $D(y) = (0; \infty)$;

в) $\cos x > 0$ при $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

$$D(y) = \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n / n \in \mathbb{Z} \right);$$

г) $1 - 3^x > 0 \Leftrightarrow 3^x < 3^0 \Leftrightarrow x < 0$; $D(y) = (-\infty; 0)$.

506. а) $\log_2 2 \sin \frac{\pi}{15} + \log_2 \cos \frac{\pi}{15} = \log_2 \sin \frac{2\pi}{15}$;

б)

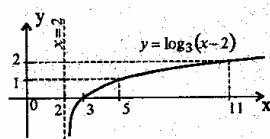
$$\log_4 (\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{3}) + \log_4 (\sqrt[3]{49} + \sqrt[3]{21} + \sqrt[3]{9}) = \log_4 \left((\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{3}) (\sqrt[3]{7^2} + \sqrt[3]{7 \cdot 3} + \sqrt[3]{3}) \right) =$$

$$= \log_4 4 = 1;$$

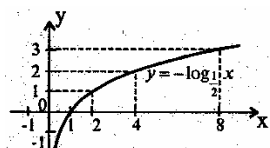
в) $\lg \operatorname{tg} 4 + \lg \operatorname{ctg} 4 = \lg (\operatorname{tg} 4 \operatorname{ctg} 4) = \lg 1 = 0$;

г) $\log_{\pi} (5 + 2\sqrt{6}) + \log_{\pi} (5 - 2\sqrt{6}) = \log_{\pi} (25 - 24) = \log_{\pi} 1 = 0$;

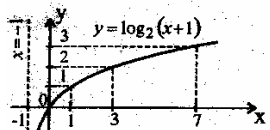
507. а) $y = \log_3 (x - 2)$;



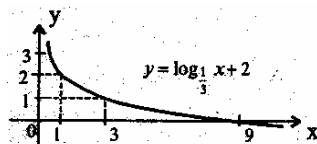
б) $y = -\log_{\frac{1}{2}} x$;



в) $y = \log_2 (x + 1)$;



г) $y = \log_{\frac{1}{3}} x + 2$.



508. а) $\log_3 x = 2\log_9 6 - \log_9 12 \Leftrightarrow \log_3 x = \log_9 3 \Leftrightarrow \log_3 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{3}$;

б) $\log_{\frac{1}{2}} x = \log_{0,2} 35 - 2\log_{0,2} 25\sqrt{7} \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} x = \log_{0,2} \frac{35}{625 \cdot 7} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} x = \log_{0,2} 0,008 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{1}{8}$;

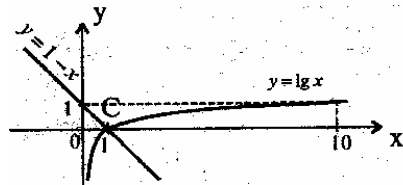
в)

$\log_5 x = \frac{1}{2} \log_3 144 + \log_3 0,75 \Leftrightarrow \log_5 x = \log_3 (12 \cdot 0,75) \Leftrightarrow \log_5 x = 2 \Leftrightarrow x = 25$;

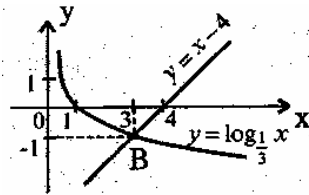
г) $\log_{\pi} x = 3\log_{0,1} 4 + 2\log_{0,1} \frac{1}{2} \Leftrightarrow \log_{\pi} x = \log_{0,1} \frac{64 \cdot 25}{16} \Leftrightarrow \log_{\pi} x = -2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\pi^2}$.

509. В этом номере всегда одна функция возрастает, а другая убывает, вследствие чего они могут пересекаться лишь в одной точке.

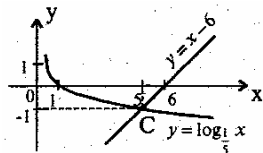
а) $\lg x = 1 - x$; графики функций $y = \lg x$ и $y = 1 - x$ пересекаются в т. А(1;0), т.о. $x = 1$.



б) $\log_{\frac{1}{3}} x = x - 4$; Графики функций $y = x - 4$ и $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ пересекаются в т. В(3,-1), т.о. $x = 3$.

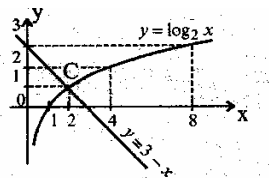


в) $\log_{\frac{1}{5}} x = x - 6$;



Графики функций $y = x - 6$ и $y = \log_{\frac{1}{5}} x$ пересекаются в т. С(5,-1), т.о. $x = 5$.

г) $\log_2 x = 3 - x$; графики функций $y = \log_2 x$ и $y = 3 - x$ пересекаются в т. D(2;1), т.о. $x = 2$.



510. а) нет; б) нет; в) нет; г) нет.

511.

а) $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$ убывает на $D(f)$, поэтому $\max_{[1;4]} f(x) = f(1) = 0$,

$$\min_{[1;4]} f(x) = f(4) = -1;$$

б) $f(x) = \log_9 x$ возрастает на $D(f)$ поэтому

$$\min_{\left[\frac{1}{9};9\right]} f(x) = f\left(\frac{1}{9}\right) = -1, \max_{\left[\frac{1}{9};9\right]} f(x) = f(9) = 1;$$

в) $f(x) = \log_5 x$ возрастает на $D(f)$ поэтому

$$\min_{\left[\frac{1}{5};1\right]} f(x) = f\left(\frac{1}{5}\right) = -1, \max_{\left[\frac{1}{5};1\right]} f(x) = f(1) = 0;$$

г) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ убывает на $D(f)$ поэтому

$$\max_{\left[\frac{1}{2};4\right]} f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 1, \min_{\left[\frac{1}{2};4\right]} f(x) = f(4) = -2.$$

39. Решение логарифмических уравнений и неравенств

512. а) $9^x = 0,7 \Leftrightarrow \log_9 9^x = \log_9 0,7 \Leftrightarrow x = \log_9 0,7$;

б) $(0,3)^x = 7 \Leftrightarrow \log_{0,3} (0,3)^x = \log_{0,3} 7 \Leftrightarrow x = \log_{0,3} 7$;

в) $2^x = 10 \Leftrightarrow \log_2 2^x = \log_2 10 \Leftrightarrow x = \log_2 10$;

г) $10^x = \pi \Leftrightarrow \lg 10^x = \lg \pi \Leftrightarrow x = \lg \pi$.

513. а) $\log_5 x = 2 \Leftrightarrow x = 5^2 \Leftrightarrow x = 25$; б) $\log_{0,4} x = -1 \Leftrightarrow x = (0,4)^{-1} \Leftrightarrow x = 2,5$;

в) $\log_9 x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 9^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$; г) $\lg x = 2 \Leftrightarrow x = 10^2 \Leftrightarrow x = 100$.

514. а) $\log_{\frac{1}{2}} (2x-4) = -2 \Leftrightarrow 2x-4 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \Leftrightarrow 2x-4 = 4 \Leftrightarrow x = 4$;

$$\text{б) } \log_{\pi}(x^2+2x+3)=\log_{\pi}6 \Leftrightarrow x^2+2x+3=6 \Leftrightarrow x^2+2x-3=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3, \\ x=1. \end{cases}$$

$$\text{в) } \log_{0,3}(5+2x)=1 \Leftrightarrow 5+2x=0,3 \Leftrightarrow x=-2,35.$$

$$\text{г) } \log_2(3-x)=0 \Leftrightarrow 3-x=1 \Leftrightarrow x=2.$$

$$\mathbf{515. \text{ а) } (0,2)^{4-x}=3 \Leftrightarrow 4-x=\log_{0,2} 3 \Leftrightarrow x=4-\log_{0,2} 3.}$$

$$\text{б) } 5^{x^2}=7 \Leftrightarrow x^2=\log_5 7 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\log_5 7}.$$

$$\text{в) } 3^{2-3x}=8 \Leftrightarrow 2-3x=\log_3 8 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}(2-\log_3 8).$$

$$\text{г) } 7^{2x}=4 \Leftrightarrow 2x=\log_7 4 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\log_7 4.$$

$$\mathbf{516. \text{ а) } \log_3 x > 2 \Leftrightarrow \log_3 x > \log_3 9 \Leftrightarrow x > 9.}$$

$$\text{б) } \log_{0,5} x > -2 \Leftrightarrow \log_{0,5} x > \log_{0,5} 25 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 25, \\ x > 0. \end{cases} \text{ Итого: } (0;25).$$

$$\text{в) } \log_{0,7} x < 1 \Leftrightarrow \log_{0,7} x < \log_{0,7} 0,7 \Leftrightarrow x > 0,7.$$

$$\text{г) } \log_{2,5} x < 2 \Leftrightarrow \log_{2,5} x < \log_{2,5} 6,25 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 6,25, \\ x > 0. \end{cases} \text{ Итого: } (0;6,25).$$

$$\mathbf{517. \text{ а) } \log_4(x-2) < 2 \Leftrightarrow \log_4(x-2) < \log_4 16 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 < 16, \\ x-2 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 18, \\ x > 2. \end{cases}}$$

$$\text{б) } \log_{\frac{1}{3}}(3-2x) > -1; \log_{\frac{1}{3}}(3-2x) > \log_{\frac{1}{3}} 3 \Leftrightarrow 3-2x < 3 \Leftrightarrow x > 0.$$

$$\text{в) } \log_5(3x+1) > 2 \Leftrightarrow \log_5(3x+1) > \log_5 25 \Leftrightarrow 3x+1 > 25 \Leftrightarrow x > 8.$$

$$\text{г) } \log_{\frac{1}{7}}(4x+1) < -2 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{7}}(4x+1) < \log_{\frac{1}{7}} 49 \Leftrightarrow 4x+1 > 49 \Leftrightarrow x > 12.$$

$$\mathbf{518. \text{ а) } \log_a x = 2\log_a 3 + \log_a 5 \Leftrightarrow \log_a x = \log_a 45 \Leftrightarrow x = 45 \text{ при } a > 0 \text{ и } a \neq 1.}$$

$$\text{б) } \lg(x-9) + \lg(2x-1) = 2$$

$$\begin{cases} (x-9)(2x-1)=100, \\ x-9>0, \\ 2x-1>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-19x-91=0, \\ x>9, \\ x>0,5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3,5 - \text{не подходит} \\ x=13; \\ x>9. \end{cases} \Leftrightarrow x=13.$$

$$\text{в) } \log_a x = \log_a 10 - \log_a 2 \Leftrightarrow \log_a x = \log_a 5 \Leftrightarrow x = 5 \text{ при } a > 0 \text{ и } a \neq 1.$$

$$\text{г) } \log_3(x+1) + \log_3(x+3) = 1$$

$$\begin{cases} (x+1)(x+3)=3, \\ x+1>0, \\ x+3>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+4x+3=3, \\ x>-1, \\ x>-3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+4)=0; \\ x>-1; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 - \text{не подходит} \\ x=0; \\ x>-1. \end{cases} \Leftrightarrow x=0.$$

$$519. \text{ a) } \frac{1}{2} \log_2(x-4) + \frac{1}{2} \log_2(2x-1) = \log_2 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)(2x-1)=9, \\ x-4>0, \\ 2x-1>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-9x-5=0, \\ x>4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=-0,5 - \text{не подходит,} \\ x=5; \end{cases} \\ x>4; \end{cases} \Leftrightarrow x=5.$$

$$\text{б) } \lg(3x^2 + 12x + 19) - \lg(3x + 4) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x^2 + 12x + 19}{3x + 4} = 10, \\ 3x^2 + 12x + 19 > 0, \\ 3x + 4 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 12x + 19 = 30x + 40, \\ x > -\frac{4}{3}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 18x - 21 = 0, \\ x > -\frac{4}{3}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=7, \\ x=-1; \end{cases} \\ x > -\frac{4}{3}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7, \\ x=-1. \end{cases}$$

$$\text{в) } \lg(x^2 + 2x - 7) - \lg(x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 7 = x - 1, \\ x^2 + 2x - 7 > 0, \\ x - 1 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 6 = 0, \\ \begin{cases} x < -1 - 2\sqrt{2}, \\ x > -1 + 2\sqrt{2}; \end{cases} \\ x > 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = -3, \\ x = 2; \end{cases} \\ x > -1 + 2\sqrt{2}; \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

$$\text{г) } \log_5(x^2 + 8) - \log_5(x + 1) = 3 \log_5 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 + 8}{x + 1} = 8, \\ x + 1 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 8x = 0, \\ x > -1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 0, \\ x = 8; \end{cases} \\ x > -1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = 8. \end{cases}$$

520.

$$\text{а) } \log_4^2 x + \log_4 \sqrt{x} - 1,5 = 0 \Leftrightarrow \log_4^2 x + 0,5 \log_4 x - 1,5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_4 x = -1,5, \\ \log_4 x = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{8}, \\ x = 4. \end{cases}$$

$$\text{б) } \lg^2 x - \lg x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lg^2 x - 2 \lg x + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lg x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lg x = 1, x = 10.$$

$$\text{в) } \log_5^2 x - \log_5 x = 2 \Leftrightarrow \log_5^2 x - \log_5 x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_5 x = -1, \\ \log_5 x = 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{5}, \\ x = 25. \end{cases}$$

$$\text{г) } \log_3^2 x - 2 \log_3 x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x = -1, \\ \log_3 x = 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}, \\ x = 27. \end{cases}$$

521.

$$\text{а) } \begin{cases} x + y = 7, \\ \lg x + \lg y = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 7 - x, \\ \lg x + \lg(7 - x) = \lg 10; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 7 - x, \\ x(7 - x) = 10, \\ x > 0, \\ 7 - x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 7 - x, \\ x^2 - 7x + 10 = 0, \\ x > 0, \\ x < 7; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 7 - x, \\ \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = 5; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x_1 = 2, \\ y_1 = 5; \\ x_2 = 5, \\ y_2 = 2; \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{б)} \begin{cases} \log_4(x + y) = 2, \\ \log_3 x + \log_3 y = 2 + \log_3 7; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_4(x + y) = \log_4 16, \\ \log_3(xy) = \log_3 63, \\ x > 0, \\ y > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 16, \\ xy = 63, \\ x > 0, \\ y > 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 16 - x, \\ x(16 - x) = 63, \\ x > 0, \\ y > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 16 - x, \\ x^2 - 16x + 63 = 0, \\ x > 0, \\ y > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 16 - x, \\ \begin{cases} x_1 = 7, \\ x_2 = 9; \end{cases} \\ x > 0, \\ y > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x_1 = 7, \\ y_1 = 9; \\ x_2 = 9, \\ y_2 = 7. \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{в)} \begin{cases} x + y = 34, \\ \log_2 x + \log_2 y = 6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 34 - x, \\ \log_2 xy = \log_2 64, \\ x > 0, \\ y > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 34 - x, \\ \log_2(x)(34 - x) = \log_2 64, \\ x > 0, \\ y > 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 34 - x, \\ x^2 - 34x + 64 = 0, \\ x > 0, \\ y > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 34 - x, \\ \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = 32; \end{cases} \\ x > 0, y > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x_1 = 2, \\ y_1 = 32; \\ x_2 = 32, \\ y_2 = 2. \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{г)} \begin{cases} \log_4 x - \log_4 y = 0, \\ x^2 - 5y^2 + 4 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y, \\ x^2 - 5y^2 + 4 = 0, \\ x > 0, y > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x, \\ 4 - 4x^2 = 0, \\ x > 0, y > 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x, \\ \begin{cases} x_1 = -1 - \text{не подходит}, \\ x_2 = 1; \end{cases} \\ x > 0, y > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 1. \end{cases}$$

$$\text{522. а)} \frac{1}{\lg x + 1} + \frac{6}{\lg x + 5} = 1 \Leftrightarrow \frac{\lg x + 5 + 6 \lg x + 6 - (\lg x + 1)(\lg x + 5)}{(\lg x + 1)(\lg x + 5)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\lg^2 x - \lg x - 6}{(\lg x + 1)(\lg x + 5)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lg^2 x - \lg x - 6 = 0, \\ \lg x \neq -1, \\ \lg x \neq -5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} \lg x = -2, \\ \lg x = 3; \end{cases} \\ \lg x \neq -1, \\ \lg x \neq -5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0,01, \\ x_2 = 1000. \end{cases}$$

$$\text{б)} \log_2 \frac{x}{4} = \frac{15}{\log_2 \frac{x}{8} - 1} \Leftrightarrow \log_2 x - 2 = \frac{15}{\log_2 x - 4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\log_2 x - 2)(\log_2 x - 4) - 15}{\log_2 x - 4} = 0 \Leftrightarrow \frac{\log_2^2 x - 6\log_2 x - 7}{\log_2 x - 4} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2^2 x - 6\log_2 x - 7 = 0, \\ \log_2 x \neq 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = -1, \\ \log_2 x = 7; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0,5, \\ x_2 = 128. \end{cases}$$

$$\text{в)} \frac{2\lg x}{\lg(5x-4)} = 1 \Leftrightarrow \frac{2\lg x - \lg(5x-4)}{\lg(5x-4)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lg \frac{x^2}{5x-4} = 0, \\ \lg(5x-4) \neq 0, \\ x > 0, \\ 5x-4 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{5x-4} = 1, \\ x > 0,8; \\ 5x-4 \neq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 4 = 0, \\ x > 0,8; \\ x \neq 1; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - \text{не подходит}, \\ x_2 = 4; \\ x > 0,8, \\ x \neq 1; \end{cases} \Leftrightarrow x = 4;$$

$$\text{г)} \frac{1}{\lg x - 6} + \frac{5}{\lg x + 2} = 1 \Leftrightarrow \frac{\lg x + 2 + 5\lg x - 30 - (\lg x - 6)(\lg x + 2)}{(\lg x - 6)(\lg x + 2)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\lg^2 x - 10\lg x + 16}{(\lg x - 6)(\lg x + 2)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lg^2 x - 10\lg x + 16 = 0, \\ \lg x \neq 6, \\ \lg x \neq -2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg x = 2, \\ \lg x = 8; \\ \lg x \neq 6, \\ \lg x \neq -2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 100, \\ x_2 = 10^8. \end{cases}$$

523.

$$\text{а)} \log_a x = \log_{\sqrt{a}} 2 + \log_{\frac{1}{a}} 3 \Leftrightarrow \log_a x = \log_a 4 - \log_a 3;$$

$$\log_a x = \log_a \frac{4}{3} \Leftrightarrow x = \frac{4}{3} \text{ при } a > 0, a \neq 1;$$

$$\text{б)} \log_x 2 - \log_4 x + \frac{7}{6} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\log_4 2}{\log_4 x} - \log_4 x + \frac{7}{6} = 0, \\ x \neq 1, x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3 - 6\log_4^2 x + 7\log_4 x}{6\log_4 x} = 0, \\ x \neq 1, x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6\log_4^2 x - 7\log_4 x - 3 = 0, \\ x \neq 1, x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_4 x = -\frac{1}{3}, \\ \log_4 x = \frac{3}{2}; \\ x \neq 1, x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}, \\ x_2 = 8; \end{cases}$$

$$b) \log_3 x - 2 \log_{\frac{1}{3}} x = 6 \Leftrightarrow \log_3 x - 2 \log_3 x = 6; \log_3 x = 2 \Leftrightarrow x = 9;$$

$$r) \log_{25} x + \log_5 x = \log_{\frac{1}{5}} \sqrt{8} \Leftrightarrow \log_5 x + 2 \log_5 x + 2 \log_5 \sqrt{8};$$

$$\log_5 x = \log_5 \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

$$524. a) \log_2(9 - 2^x) = 3 - x \Leftrightarrow 2^{3-x} = 9 - 2^x \Leftrightarrow 2^x + 8 \cdot 2^{-x} - 9 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{2x} - 9 \cdot 2^x + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 1, \\ 2^x = 8; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = 3; \end{cases}$$

$$б) \log_2(25^{x+3} - 1) = 2 + \log_2(5^{x+3} + 1) \Leftrightarrow \log_2(5^{2x} \cdot 5^6 - 1) = \log_2(4 \cdot 5^{x+3} + 4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 15625 \cdot 5^{2x} = 500 \cdot 5^x + 5, \\ 15625 \cdot 5^{2x} > 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3125 \cdot 5^{2x} - 100 \cdot 5^x - 1 = 0, \\ 25^x > 25^{-3}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5^x = -0,008 - \text{не подходит,} \\ 5^x = 0,04; \\ x > -3; \end{cases} \Leftrightarrow x = -2;$$

$$в) \log_4(2 \cdot 4^{x-2} - 1) = 2x - 4 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cdot 4^{x-2} - 1 = 4^{2x-4}, \\ 2 \cdot 4^{x-2} - 1 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{256} \cdot 4^{2x} - \frac{1}{8} \cdot 4^x + 1 = 0, \\ 2^{2(x-2)} > 2^{-1}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (4^x - 16)^2 = 0, \\ 2x - 4 > -1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4^x = 16, \\ x > 1,5; \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

$$r) \log_2(4^x + 4) = \log_2 2^x + \log_2(2^{x+1} - 3) \Leftrightarrow \log_2(4^x + 4) = \log_2(2 \cdot 4^x - 3 \cdot 2^x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4^x + 4 = 2 \cdot 4^x - 3 \cdot 2^x, \\ 2^{x+1} - 3 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{2x} - 3 \cdot 2^x - 4 = 0, \\ 2^x > \frac{3}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = -1 - \text{не подходит,} \\ 2^x = 4; \\ 2^x > \frac{3}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow 2^x = 4 \Leftrightarrow x = 2.$$

525.

$$a) \lg(2x - 3) > \lg(x + 1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3 > x + 1, \\ 2x - 3 > 0, \\ x + 1 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4, \\ x > 1,5, \\ x > -1; \end{cases} \text{Итого: } (4; \infty).$$

$$б) \log_{0,3}(2x - 4) > \log_{0,3}(x + 1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4 < x + 1, \\ 2x - 4 > 0, \\ x + 1 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 5, \\ x > 2, \\ x > -1. \end{cases}$$

Итого: (2; 5).

$$в) \lg(3x-7) \leq \lg(x+1) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-7 > 0, \\ x+1 > 0, \\ 3x-7 \leq x+1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2\frac{1}{3}, \\ x > -1, \\ x \leq 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2\frac{1}{2}, \\ x \leq 4. \end{cases}$$

$$г) \log_{0,5}(4x-7) < \log_{0,5}(x+2) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-7 > x+2, \\ 4x-7 > 0, \\ x+2 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3, \\ x > 1\frac{3}{4}, \\ x > -2; \end{cases} \Leftrightarrow x > 3.$$

$$526. а) \log_{0,5} x > \log_2(3-2x) \Leftrightarrow \log_2 \frac{1}{x} > \log_2(3-2x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} > 3-2x, \\ x > 0, \\ 3-2x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1-3x+2x^2}{x} > 0, \\ x > 0, \\ x < 1,5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2(x-0,5)(x-1)}{x} > 0, \\ x > 0, \\ x < 1,5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 0 < x < 0,5, \\ x > 1; \end{cases} \\ x > 0, \\ x < 1,5; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 0,5, \\ 1 < x < 1,5. \end{cases} \quad \text{Итого: } (0;0,5) \cup (1;1,5).$$

$$б) \log_{\pi}(x+1) + \log_{\pi} x < \log_{\pi} 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_{\pi} x(x+1) < \log_{\pi} 2, \\ x+1 > 0, \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-2 < 0, \\ x > -1, \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2, \\ x < 1, \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1, \\ x > 0. \end{cases} \quad \text{Итого: } (0;1).$$

$$в) \lg x + \lg(x-1) < \lg 6 \Leftrightarrow \begin{cases} \lg x(x-1) < \lg 6, \\ x > 0, \\ x-1 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-6 < 0, \\ x > 0, \\ x > 1; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -2, \\ x < 3, \\ x > 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3, \\ x > 1. \end{cases} \quad \text{Итого: } (1;3).$$

$$г) \log_2(x^2-x-12) < 3 \Leftrightarrow \log_2(x^2-x-12) < \log_2 8 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-12 < 8, \\ x^2-x-12 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-20 < 0, \\ x < -3, \\ x > 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x > -4, \\ x < 5; \end{cases} \\ x < -3, \\ x > 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 < x < -3, \\ 4 < x < 5. \end{cases} \quad \text{Итого: } (-4;-3) \cup (4;5).$$

$$527. а) \log_2^2 x - \log_2 x \leq 6 \Leftrightarrow \log_2^2 x - \log_2 x - 6 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x \geq -2, \\ \log_2 x \leq 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{4}, \\ x \leq 8. \end{cases} \quad \text{Итого: } \left[\frac{1}{4}; 8\right].$$

$$\text{б) } \log_{\frac{1}{3}}^2 x - 4 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{\frac{1}{3}} x > 2, \\ \log_{\frac{1}{3}} x < -2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{\frac{1}{3}} x > \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9}, \\ \log_{\frac{1}{3}} x < \log_{\frac{1}{3}} 9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{9}, \\ x > 9; \\ x > 0. \end{cases}$$

$$\text{Итого: } \left(0; \frac{1}{9}\right) \cup (9; \infty).$$

$$\text{в) } \lg^2 x + 2 \lg x > 3 \Leftrightarrow \lg^2 x + 2 \lg x - 3 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lg x > 1, \\ \lg x < -3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 10, \\ x < 0,001; \\ x > 0. \end{cases}$$

$$\text{Итого: } (0; 0,001) \cup (10; \infty).$$

$$\text{г) } \log_3^2 x - 9 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x \leq 3, \\ \log_3 x \geq -3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x \leq \log_3 27, \\ \log_3 x \geq \log_3 \frac{1}{27}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 27, \\ x \geq \frac{1}{27}, \\ x > 0. \end{cases}$$

$$\text{Итого: } \left[\frac{1}{27}; 27\right].$$

$$\text{528. а) } \log_2 \left(\sin \frac{x}{2}\right) < -1 \Leftrightarrow \log_2 \left(\sin \frac{x}{2}\right) < \log_2 \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \frac{x}{2} < \frac{1}{2}, \\ \sin \frac{x}{2} > 0; \end{cases}$$

$$\frac{x}{2} \in \left(2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; \pi + 2\pi n\right);$$

$$x \in \left(4\pi n; \frac{\pi}{3} + 4\pi n\right) \cup \left(\frac{5\pi}{3} + 4\pi n; 2\pi + 4\pi n\right);$$

$$\text{б) } |3 - \log_2 x| < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - \log_2 x < 2, \\ 3 - \log_2 x > -2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x > \log_2 2, \\ \log_2 x < \log_2 32; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2, \\ x < 32. \end{cases}$$

$$\text{Итого: } (2; 32).$$

$$\text{в) } \log_{\frac{1}{2}} \cos 2x > 1 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} \cos 2x > \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x < \frac{1}{2}, \\ \cos 2x > 0; \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{2} + 2\pi k < 2x < -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \\ \frac{\pi}{3} + 2\pi k < 2x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z; \end{cases} \begin{cases} -\frac{\pi}{4} + \pi k < x < -\frac{\pi}{6} + \pi k, \\ \frac{\pi}{6} + \pi k < x < \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z. \end{cases}$$

$$\text{Итого: } \left(-\frac{\pi}{4} + \pi k; -\frac{\pi}{6} + \pi k\right) \cup \left(\frac{\pi}{6} + \pi k; \frac{\pi}{4} + \pi k\right), k \in Z.$$

$$\text{г)} |3\lg x - 1| < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3\lg x - 1 < 2, \\ 3\lg x - 1 > -2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg x < 1, \\ \lg x > -\frac{1}{3}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 10, \\ x > 10^{-\frac{1}{3}}, \\ x > 0. \end{cases}$$

$$\text{Итого: } \left(\frac{1}{\sqrt[3]{10}}; 10 \right).$$

529.

$$\text{а)} \begin{cases} \log_{\frac{1}{3}}(x+y) = 2, \\ \log_3(x-y) = 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{\frac{1}{3}}(x+y) = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9}, \\ \log_3(x-y) = \log_3 9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \frac{1}{9}, \\ x-y = 9, \\ x+y > 0, \\ x-y > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 9\frac{1}{9}, \\ 2y = -8\frac{8}{9}, \\ x+y > 0, \\ x-y > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4\frac{5}{9}, \\ y = -4\frac{4}{9}; \end{cases}$$

$$\text{б)} \begin{cases} \lg(x^2 + y^2) = 2, \\ \log_{48} x + \log_{48} y = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg(x^2 + y^2) = \lg 100, \\ \log_{48} xy = \log_{48} 48, \\ x > 0, y > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 100, \\ xy = 48, \\ x > 0, y > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 6, \\ y_1 = 8; \\ x_2 = 8, \\ y_2 = 6. \end{cases}$$

$$\text{в)} \begin{cases} \log_{\frac{1}{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} y = 2, \\ \log_{\frac{1}{3}} x - \log_{\frac{1}{3}} y = 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{\frac{1}{3}} x = 3, \\ \log_{\frac{1}{3}} y = -1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{27}, \\ y = 3; \end{cases}$$

$$\text{г)} \begin{cases} \lg(x^2 + y^2) = 1 + \lg 13, \\ \lg(x+y) = \lg(x-y) + \lg 8; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg(x^2 + y^2) = \lg 130, \\ \lg \frac{x+y}{x-y} = \lg 8, \\ x+y > 0, x-y > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 130, \\ x+y = 8x-8y, \\ x+y > 0, \\ x-y > 0; \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \frac{49}{81}x^2 = 130, \\ y = \frac{7}{9}x, \\ x+y > 0, \\ x-y > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 81, \\ y = \frac{7}{9}x, \\ x+y > 0, \\ x-y > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -9, \\ y_1 = -7; \text{ — не подходит} \\ x_2 = 9, \\ y_2 = 7. \end{cases}$$

530.

$$\text{а)} \begin{cases} 3^y \cdot 9^x = 81, \\ \lg(x+y)^2 - \lg x = 2\lg 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{2x+y} = 3^4, \\ \lg \frac{(x+y)^2}{x} = \lg 9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y = 4, \\ (x+y)^2 = 9x, \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4-2x, \\ (4-x)^2 = 9x, \\ x > 0; \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 4-2x, \\ x^2 - 17x + 16 = 0, \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4-2x, \\ x_1 = 1, \\ x_2 = 16; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = 2; \\ x_2 = 16, \\ y_2 = -28. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\text{б)} \quad & \begin{cases} 10^{1+\lg(x+y)} = 50, \\ \lg(x+y) + \lg(x-y) = 2 - \lg 5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=5, \\ \lg(x^2-y^2) = \lg 20, \\ x+y>0, \\ x-y>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=5, \\ x^2-y^2=20, \\ x+y>0, \\ x-y>0; \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \begin{cases} x+y=5, \\ x-y=4, \\ x+y>0, \\ x-y>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=9, \\ 2y=1, \\ x+y>0, \\ x-y>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4,5, \\ y=0,5; \end{cases} \\
\text{в)} \quad & \begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 576, \\ \log_{\sqrt{2}}(y-x) = 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 576, \\ \log_{\sqrt{2}}(y-x) = \log_{\sqrt{2}} 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 576, \\ y-x=4, \\ y-x>0; \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x \cdot 2^{x+4} = 576, \\ y=4+x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6^x = 36, \\ y=4+x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2, \\ y=6; \end{cases} \\
\text{г)} \quad & \begin{cases} \lg x - \lg y = \lg 5 - 1, \\ 10^{\lg(3x+2y)} = 39; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg \frac{x}{y} = \lg \frac{5}{2}, \\ 3x+2y=39, \\ x>0, y>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3y=0, \\ 3x+2y=39, \\ x>0, \\ y>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13x=117, \\ 13y=78, \\ x>0, \\ y>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=9, \\ y=6. \end{cases}
\end{aligned}$$

40. Понятие об обратной функции

531. а) $f(x) = 2x + 1$; $D(f) = E(f) = \mathbb{R}$; $y = 2x + 1$, $x = \frac{y-1}{2}$;

$g(x) = \frac{x-1}{2}$ обратная для $f(x)$; $D(g) = E(g) = \mathbb{R}$;

б) $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$; $D(f) = E(f) = \mathbb{R}$; $y = \frac{1}{2}x - 1$, $x = 2y + 2$;

$g(x) = 2x + 2$ — обратная для $f(x)$; $D(g) = E(g) = \mathbb{R}$;

в) $f(x) = -2x + 1$; $D(f) = E(f) = \mathbb{R}$; $y = -2x + 1$, $x = \frac{1-y}{2}$;

$g(x) = \frac{1-x}{2}$ — обратная для $f(x)$; $D(g) = E(g) = \mathbb{R}$;

г) $f(x) = -\frac{1}{2}x - 1$; $D(f) = E(f) = \mathbb{R}$; $y = -\frac{1}{2}x - 1$, $x = -2y - 2$;

$g(x) = -2x - 2$ — обратная для $f(x)$; $D(g) = E(g) = \mathbb{R}$.

532. а) $f(x) = -\frac{1}{x}$; $D(f) = E(f) = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$; $y = -\frac{1}{x}$, $x = -\frac{1}{y}$;

$g(x) = -\frac{1}{x}$ — обратная для $f(x)$; $D(g) = E(g) = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$;

б) $f(x) = 2x^2 (x \geq 0)$; $D(f) = E(f) = [0; \infty)$; $y = 2x^2$, $x = \sqrt{\frac{y}{2}}$;

$$g(x) = \sqrt{\frac{x}{2}} - \text{обратная для } f(x); D(g) = E(g) = [0; \infty);$$

$$в) f(x) = \frac{x}{x+2} = 1 - \frac{2}{x+2}; D(f) = (-\infty; -2) \cup (-2; \infty), E(f) = (-\infty; 1) \cup (1; \infty);$$

$$y = \frac{x}{x+2}, x = \frac{2y}{1-y}; g(x) = \frac{2x}{1-x} - \text{обратная для } f(x);$$

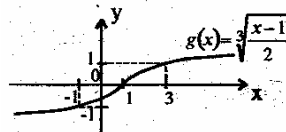
$$D(g) = E(f) = (-\infty; 1) \cup (1; \infty), E(g) = D(f) = (-\infty; -2) \cup (-2; \infty);$$

$$г) f(x) = \sqrt{x+1}; D(f) = [-1; \infty), E(f) = [0; \infty); y = \sqrt{x+1}, x = y^2 - 1;$$

$$g(x) = x^2 - 1 - \text{обратная для } f(x); D(g) = E(f) = [0; \infty), E(g) = D(f) = [-1; \infty).$$

533.

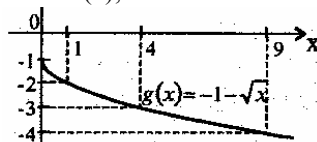
$$а) f(x) = 2x^3 + 1; y = 2x^3 + 1, x = \sqrt[3]{\frac{y-1}{2}};$$



$$g(x) = \sqrt[3]{\frac{x-1}{2}} - \text{обратная к } f(x);$$

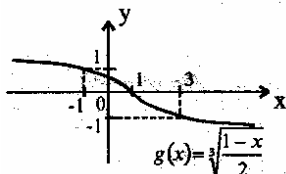
$$б) f(x) = (x+1)^2, x \in (-\infty; -1]; y = (x+1)^2, x = -1 - \sqrt{y};$$

$$g(x) = -1 - \sqrt{x} - \text{обратная к } f(x);$$



$$в) f(x) = -2x^3 + 1; y = -2x^3 + 1,$$

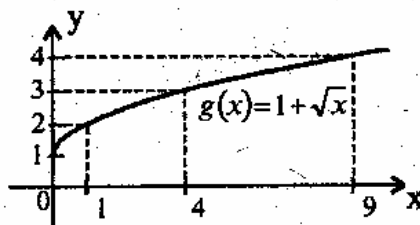
$$x = \sqrt[3]{\frac{1-y}{2}};$$



$$g(x) = \sqrt[3]{\frac{1-x}{2}} - \text{обратная к } f(x);$$

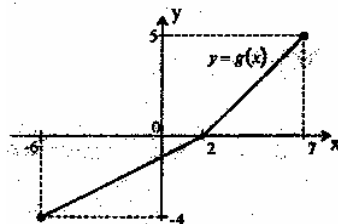
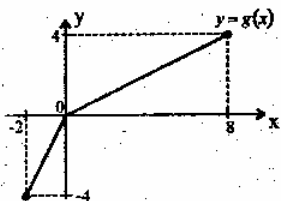
$$г) f(x) = (x-1)^2, x \in [1; \infty); y = (x-1)^2, x = 1 + \sqrt{y};$$

$$g(x) = 1 + \sqrt{x} - \text{обратная к } f(x).$$

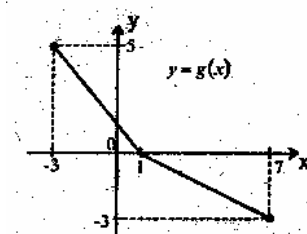
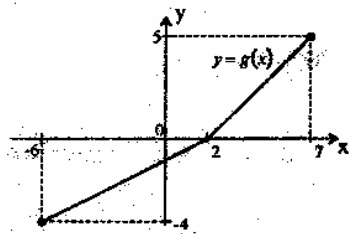


534.

а) $g(-2) = -4$, $g(1) = 0,5$, $g(3) = 1,5$; $D(g) = [-2; 8]$, $E(g) = [-4; 4]$; б) $g(-2) = 1$, $g(1) = -1$, $g(3) = -3$; $D(g) = [-6; 4]$, $E(g) = [-4; 3]$;

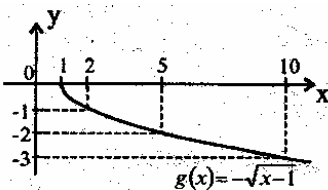


в) $g(-2) = -2$, $g(1) = -0,5$, $g(3) = 1$; $D(g) = [-6; 7]$, $E(g) = [-4; 5]$; г) $g(-2) = 4$, $g(1) = 0$, $g(3) = -1$; $D(g) = [-3; 7]$, $E(g) = [-3; 5]$.



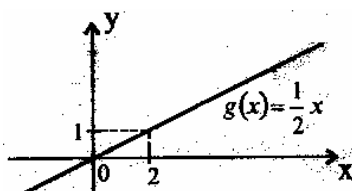
535. а) $f(x) = x^2 + 1$, $x \leq 0$; т.к. $f(x)$ убывает на $(-\infty; 0]$, то на $(-\infty; 0]$ существует $g(x)$, обратная к $f(x)$; $y = x^2 + 1$, $x = -\sqrt{y-1}$;

$g(x) = -\sqrt{x-1}$, $D(g) = [1; \infty)$, $E(g) = (-\infty; 0]$;

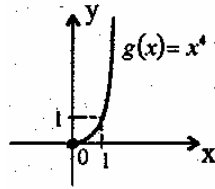


б) $f(x) = 2x$, $(-\infty; \infty)$; т.к. $f(x)$ возрастает на \mathbb{R} , то на \mathbb{R} существует $g(x)$, обратная к $f(x)$; $y = 2x$, $x = \frac{1}{2}y$;

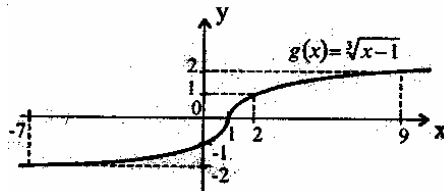
$g(x) = \frac{1}{2}x$, $D(g) = E(g) = \mathbb{R}$;



в) $f(x) = \sqrt[4]{x}, x \geq 0$; т.к. $f(x)$ возрастает на $[0; \infty)$, то на $[0; +\infty)$ существует $g(x)$, обратная к $f(x)$; $y = \sqrt[4]{x}, x = y^4$;
 $g(x) = x^4, D(g) = [0, \infty), E(g) = [0; \infty)$;



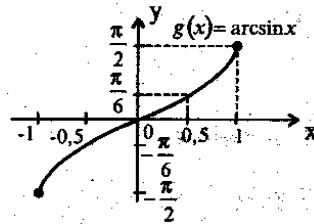
г) $f(x) = x^3 + 1, (-\infty; \infty)$; т.к. $f(x)$ возрастает на \mathbb{R} , то на \mathbb{R} существует $g(x)$, обратная к $f(x)$; $y = x^3 + 1, x = \sqrt[3]{y-1}$; $g(x) = \sqrt[3]{x-1}, D(g) = E(g) = \mathbb{R}$.



536.

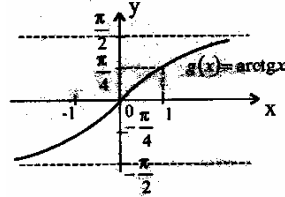
а) $f(x) = \sin x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; т.к. $f(x)$ возрастает на $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то на $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ существует $g(x)$, обратная к $f(x)$;

$y = \sin x, x = \arcsin y; g(x) = \arcsin x, D(g) = [-1; 1], E(g) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;



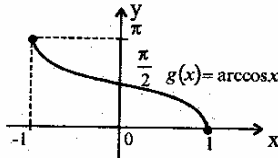
б) $f(x) = \operatorname{tg} x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$; т.к. $f(x)$ возрастает на $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, то на $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ существует $g(x)$, обратная к $f(x)$;

$$y = \operatorname{tg} x, x = \operatorname{arctg} y; g(x) = \operatorname{arctg} x, D(g) = \mathbb{R}, E(g) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right);$$



в) $f(x) = \cos x$; т.к. $f(x)$ убывает при $x \in [0; \pi]$, то на $[0; \pi]$ существует $g(x)$, обратная к $f(x)$;

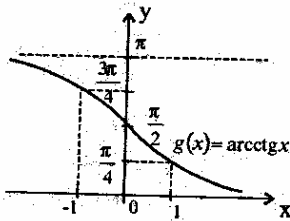
$$y = \cos x, x = \arccos y; g(x) = \arccos x, D(g) = [-1; 1], E(g) = [0; \pi];$$



г) $f(x) = \operatorname{ctg} x, x \in (0; \pi)$;

т.к. $f(x)$ убывает на $(0; \pi)$, то на $(0; \pi)$ существует $g(x)$, обратная к $f(x)$;

$$y = \operatorname{ctg} x, x = \operatorname{arctg} y; g(x) = \operatorname{arctg} x, D(g) = \mathbb{R}, E(g) = (0; \pi).$$



§ 11. Производная показательной и логарифмической функции

41. Производная показательной и логарифмической функции

537. а) $\ln 3 \approx 1,0986, \ln 5,6 \approx 1,7228, \ln 1,7 \approx 0,5306$;

б) $\ln 8 \approx 2,0794, \ln 17 \approx 2,8332, \ln 1,3 \approx 0,2624$;

в) $\ln 2 \approx 0,6931, \ln 35 \approx 3,3551, \ln 1,4 \approx 0,3365$;

г) $\ln 7 \approx 1,9459, \ln 23 \approx 3,1355, \ln 1,5 \approx 0,4055$.

538.

а) $y' = (4e^x + 5)' = 4e^x$;

б) $y' = (2x + 3e^{-x})' = 2 - 3e^{-x}$;

$$\text{в) } y' = \left(3 - \frac{1}{2}e^x\right)' = -\frac{1}{2}e^x; \quad \text{г) } y' = (5e^{-x} - x^2)' = -5e^{-x} - 2x.$$

$$\mathbf{539.} \text{ а) } y' = (e^x \cos x)' = e^x (\cos x - \sin x); \text{ б) } y' = (3e^x + 2^x)' = 3e^x + 2^x \ln 2;$$

$$\text{в) } y' = (3^x - 3x^2)' = 3^x \ln 3 - 6x; \quad \text{г) } y' = (x^2 e^x)' = xe^x(2+x).$$

$$\mathbf{540.} \text{ а) } f'(x) = (e^{-x})' = -e^{-x}, f(0) = 1, f'(0) = -1; y = 1 - x;$$

$$\text{б) } f'(x) = (3^x)' = 3^x \ln 3, f(1) = 3, f'(1) = 3 \ln 3;$$

$$y = 3 + 3 \ln 3(x-1) = 3 \ln 3 \cdot x + 3(1 - \ln 3);$$

$$\text{в) } f'(x) = (e^x)' = e^x, f(0) = 1, f'(0) = 1; y = 1 + x;$$

$$\text{г) } f'(x) = (2^{-x})' = -2^{-x} \ln 2, f(1) = \frac{1}{2}, f'(1) = -\frac{\ln 2}{2};$$

$$y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2(x-1) = -\frac{1}{2} \ln 2 \cdot x + \frac{1}{2}(1 + \ln 2).$$

541.

$$\text{а) } f(x) = 5e^x, F(x) = 5e^x + C; \quad \text{б) } f(x) = 2 \cdot 3^x, F(x) = 2 \cdot \frac{3^x}{\ln 3} + C;$$

$$\text{в) } f(x) = 4^x, F(x) = \frac{4^x}{\ln 4} + C; \quad \text{г) } f(x) = \frac{1}{2}e^x + 1, F(x) = \frac{1}{2}e^x + x + C.$$

$$\mathbf{542.} \text{ а) } \int_0^1 0,5^x dx = \frac{0,5^x}{\ln 0,5} \Big|_0^1 = \frac{0,5}{\ln 0,5} - \frac{1}{\ln 0,5} = -\frac{0,5}{\ln 0,5} = \frac{1}{2 \ln 2};$$

$$\text{б) } \int_0^1 e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}; \quad \text{в) } \int_{-2}^1 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} \Big|_{-2}^1 = \frac{2}{\ln 2} - \frac{1}{4 \ln 2} = \frac{7}{4 \ln 2};$$

$$\text{г) } \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}} 3^x dx = \frac{3^x}{\ln 3} \Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}} = \frac{9}{\ln 3} - \frac{1}{\sqrt{3} \ln 3} = \frac{9\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} \ln 3}.$$

543.

$$\text{а) } y' = \left(e^{x^2} \sin \frac{x}{2}\right)' = e^{x^2} \sin \frac{x}{2} \cdot (x^2)' + e^{x^2} \cos \frac{x}{2} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)' = 2xe^{x^2} \sin \frac{x}{2} + \frac{1}{2}e^{x^2} \cos \frac{x}{2} =$$

$$= e^{x^2} \left(2x \sin \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2}\right);$$

$$\text{б) } y' = \left(7^{\frac{x}{2}} \lg 3x\right)' = 7^{\frac{x}{2}} \ln 7 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)' \lg 3x + 7^{\frac{x}{2}} \frac{1}{\cos^2 3x} \cdot (3x)' =$$

$$= \frac{\ln 7}{2} \cdot 7^{\frac{x}{2}} \lg 3x + \frac{3}{\cos^2 3x} \cdot 7^{\frac{x}{2}} = 7^{\frac{x}{2}} \left(\frac{\ln 7}{2} \cdot \lg 3x + \frac{3}{\cos^2 3x}\right);$$

$$\begin{aligned} \text{в)} y' &= \left(e^{\sqrt{x}} \cos 2x \right)' = e^{\sqrt{x}} \cos 2x \cdot (\sqrt{x})' - e^{\sqrt{x}} \sin 2x \cdot (2x)' = \\ &= \frac{e^{\sqrt{x}} \cos 2x}{2\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} \sin 2x = e^{\sqrt{x}} \left(\frac{\cos 2x}{2\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} \sin 2x \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{г)} y' &= \left(2^{-x} \operatorname{ctg} \frac{x}{3} \right)' = 2^{-x} \ln 2 \operatorname{ctg} \frac{x}{3} \cdot (-x)' - 2^{-x} \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{3}} \cdot \left(\frac{x}{3} \right)' = \\ &= -2^{-x} \ln 2 \operatorname{ctg} \frac{x}{3} - \frac{2^{-x}}{3 \sin^2 \frac{x}{3}} = -2^{-x} \left(\ln 2 \operatorname{ctg} \frac{x}{3} - \frac{1}{3 \sin^2 \frac{x}{3}} \right). \end{aligned}$$

$$544. \text{ а)} y' = \left(\frac{x^6}{4^x + 5} \right)' = \frac{6x^5 \cdot (4^x + 5) - x^6 \cdot 4^x \ln 4}{(4^x + 5)^2} = \frac{4^x \cdot x^5 (6 - x \ln 4) + 30x^5}{(4^x + 5)^2};$$

$$\text{б)} y' = \left(\frac{e^{-x}}{x^2 + 2} \right)' = \frac{-e^{-x}(x^2 + 2) - e^{-x} \cdot 2x}{(x^2 + 2)^2} = \frac{-e^{-x}(x^2 + 2x + 2)}{(x^2 + 2)^2};$$

$$\begin{aligned} \text{в)} y' &= \left(\frac{3^x}{2^x + 5^x} \right)' = \frac{3^x \ln 3 (2^x + 5^x) - 3^x (2^x \ln 2 + 5^x \ln 5)}{(2^x + 5^x)^2} = \\ &= \frac{3^x \cdot 2^x (\ln 3 - \ln 2) + 3^x \cdot 5^x (\ln 3 - \ln 5)}{(2^x + 5^x)^2} = \frac{3^x (2^x \ln 1,5 + 5^x \ln 0,6)}{(2^x + 5^x)^2}; \end{aligned}$$

$$\text{г)} y' = \left(\frac{0,3^{-x}}{\sqrt{x} + 0,5} \right)' = \frac{-0,3^{-x} \ln 0,3 \cdot (\sqrt{x} + 0,5) - 0,3^{-x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x} + 0,5)^2}.$$

$$545. \text{ а)} f(x) = xe^{5x}; D(f) = \mathbb{R}; f'(x) = e^{5x} + 5xe^{5x} = 5e^{5x}(x+0,2);$$

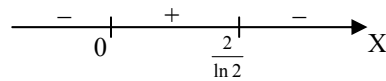
$$f'(x) = 0 \text{ при } x = -0,2, f'(x) < 0 \text{ при } x \in (-\infty; -0,2), f'(x) > 0$$

$$\text{при } x \in (-0,2; \infty); f(x) \text{ убывает на } (-\infty; -0,2], f(x) \text{ возрастает на } [-0,2; \infty),$$

$$\min_{\mathbb{R}} f(x) = f(-0,2) = -\frac{1}{5e};$$

$$\text{б)} f(x) = x^2 2^{-x}; D(f) = \mathbb{R}; f'(x) = 2x \cdot 2^{-x} + x^2 \cdot \ln 2 \cdot (-x)' = 2^{-x} \cdot x(2 - x \ln 2);$$

$$f'(x) = 0 \text{ при } x = 0; \frac{2}{\ln 2};$$



$f(x)$ убывает на $(-\infty; 0]$ и на $\left[\frac{2}{\ln 2}; \infty\right)$, $f(x)$ возрастает на $\left[0; \frac{2}{\ln 2}\right]$;

$$x = 0 - \min f(x), f(0) = 0;$$

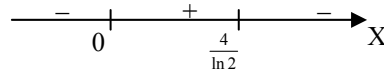
$$x = \frac{2}{\ln 2} - \max f(x), f\left(\frac{2}{\ln 2}\right) = \frac{4}{\ln^2 2} 2^{\frac{2}{\ln 2}};$$

в) $f(x) = xe^{-x}$; $D(f) = \mathbb{R}$; $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1 - x)$; $f'(x) = 0$ при $x = 1$,
 $f(x)$ возрастает на $(-\infty; 1]$, $f(x)$ убывает на $[1; \infty)$,

$$x = 1 - \max_{\mathbb{R}} f(x) = f(1) = \frac{1}{e};$$

г) $f(x) = x^4 \cdot 0,5^x$; $D(f) = \mathbb{R}$; $f'(x) = 4x^3 \cdot 0,5^x + x^4 \cdot 0,5^x \ln 0,5 = 0,5^x \cdot x^3(4 - x \ln 2)$;

$$f(x) = 0 \text{ при } x = 0; \frac{4}{\ln 2};$$



$f(x)$ убывает на $(-\infty; 0]$ и на $\left[\frac{4}{\ln 2}; \infty\right)$, $f(x)$ возрастает на $\left[0; \frac{4}{\ln 2}\right]$;

$$x = 0 - \min f(x), f(0) = 0; x = \frac{4}{\ln 2} - \max f(x); f\left(\frac{4}{\ln 2}\right) = \frac{256}{\ln^4 2} 0,5^{\frac{4}{\ln 2}}.$$

$$546. \text{ а) } f(x) = e^{3-2x}, F(x) = -\frac{1}{2}e^{3-2x} + C;$$

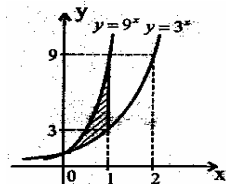
$$\text{б) } f(x) = 2 \cdot 0,9^x - 5,6^{-x}, F(x) = \frac{2 \cdot 0,9^x}{\ln 0,9} + \frac{5,6^{-x}}{\ln 5,6} + C;$$

$$\text{в) } f(x) = 2^{-10x}, F(x) = -0,1 \cdot \frac{2^{-10x}}{\ln 2} + C;$$

$$\text{г) } f(x) = e^{3x} + 2,3^{1+x} = e^{3x} + 2,3 \cdot 2,3^x, F(x) = \frac{1}{3}e^{3x} + 2,3 \frac{2,3^x}{\ln 2,3} + C = \frac{1}{3}e^{3x} + \frac{2,3^{1+x}}{\ln 2,3} + C.$$

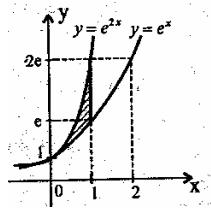
$$547. \text{ а) } S = \int_0^1 e^x dx = e^x \Big|_0^1 = e - 1;$$

$$\text{б) } S = \int_0^1 9^x dx - \int_0^1 3^x dx = \left(\frac{9^x}{\ln 9} - \frac{3^x}{\ln 3} \right) \Big|_0^1 = \frac{9}{\ln 9} - \frac{3}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 9} + \frac{1}{\ln 3} = \frac{8}{2 \ln 3} - \frac{2}{\ln 3} = \frac{2}{\ln 3};$$

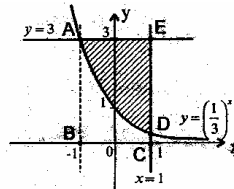


$$\text{b) } S = \int_{-1}^2 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} \Big|_{-1}^2 = \frac{4}{\ln 2} - \frac{1}{2 \ln 2} = \frac{7}{2 \ln 2};$$

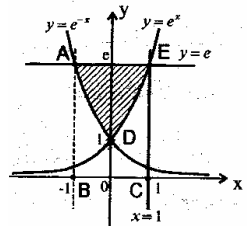
$$\text{r) } S = \int_0^1 e^{2x} dx - \int_0^1 e^x dx = \left(\frac{1}{2} e^{2x} - e^x \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} e^2 - e - \frac{1}{2} + 1 = e \left(\frac{e}{2} - 1 \right) + \frac{1}{2}.$$



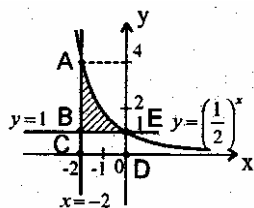
$$\begin{aligned} \text{548. a) } S_{ADE} &= S_{ABCE} - S_{ABCD} = 2 \cdot 3 - \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{3} \right)^x dx = 6 + \frac{3^{-x}}{\ln 3} \Big|_{-1}^1 = 6 + \frac{1}{3 \ln 3} - \frac{3}{\ln 3} = \\ &= 6 - \frac{8}{3 \ln 3}; \end{aligned}$$



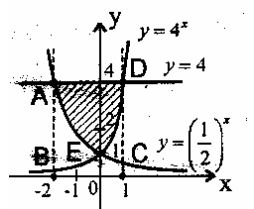
$$\begin{aligned} \text{b) } S_{ADE} &= S_{ABCE} - S_{ABOD} - S_{DOCK} = S_{ABCE} - 2S_{DOCK} = 2 \cdot e - 2 \int_0^1 e^x dx = \\ &= 2e - 2e^x \Big|_0^1 = 2e - 2e + 2 = 2; \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{b) } S_{ABE} &= S_{ACDE} - S_{BCDE} = \int_{-2}^0 \left(\frac{1}{2} \right)^x dx - 2 \cdot 1 = -\frac{2^{-x}}{\ln 2} \Big|_{-2}^0 - 2 = -\frac{1}{\ln 2} + \frac{4}{\ln 2} - 2 = \\ &= \frac{3}{\ln 2} - 2; \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{г) } S_{AED} &= S_{ABCD} - S_{ABOE} - S_{OCDE} = 3 \cdot 4 - \int_{-2}^0 \left(\frac{1}{2}\right)^x dx - \int_0^1 4^x dx = 12 + \frac{2^{-x}}{\ln 2} \Big|_{-2}^0 - \\ &- \frac{4^x}{\ln 4} \Big|_0^1 = 12 + \frac{1}{\ln 2} - \frac{4}{\ln 2} - \frac{4}{\ln 4} + \frac{1}{\ln 4} = 12 - \frac{3}{\ln 2} - \frac{3}{2 \ln 2} = 12 - \frac{9}{\ln 2}. \end{aligned}$$



42. Производная логарифмической функции

$$549. \text{ а) } y' = ((\ln(2 + 3x)))' = \frac{1}{2 + 3x} \cdot (2 + 3x)' = \frac{3}{2 + 3x};$$

$$\text{б) } y' = (\log_{0,3} x + \sin x)' = \frac{1}{x \ln 0,3} + \cos x;$$

$$\text{в) } y' = (\ln(1 + 5x))' = \frac{1}{1 + 5x} \cdot (1 + 5x)' = \frac{5}{1 + 5x};$$

$$\text{г) } y' = (\lg x - \cos x)' = \frac{1}{x \ln 10} + \sin x.$$

$$550. \text{ а) } y' = (x^2 \log_2 x)' = \frac{1}{\ln 2} \left(2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} \right) = \frac{x}{\ln 2} (2 \ln x + 1);$$

$$\text{б) } y' = \left(\frac{\ln x}{x} \right)' = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot x'}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2};$$

$$\text{в) } y' = (x \ln x)' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1; \quad \text{г) } y' = \left(\frac{x}{\ln x} \right)' = \frac{\ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}.$$

$$551. \text{ а) } f(x) = \frac{3}{7x+1}, \quad F(x) = \frac{3}{7} \ln |7x+1| + C, \quad x \neq -\frac{1}{7};$$

$$\text{б)} f(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{x+5}, \quad F(x) = \ln|x| - 2\ln|x+5| + C, \quad x \neq -5, x \neq 0;$$

$$\text{в)} f(x) = \frac{1}{x+2}, \quad F(x) = \ln|x+2| + C, \quad x \neq -2; \quad \text{г)} f(x) = \frac{4}{x}, \quad F(x) = 4\ln|x| + C, \quad x \neq 0.$$

$$\mathbf{552.} \text{ а)} f'(x) = \frac{1}{x+1}, \quad f(0) = \ln 1 = 0, \quad f'(0) = 1; \quad y = x;$$

$$\text{б)} f'(x) = (\lg x + 2)' = \frac{1}{x \ln 10}, \quad f(1) = \lg 1 + 2 = 2, \quad f'(1) = \frac{1}{\ln 10};$$

$$y = 2 + \frac{1}{\ln 10}(x-1) = \frac{x}{\ln 10} + 2 - \frac{1}{\ln 10};$$

$$\text{в)} f'(x) = (2 \ln x)' = \frac{2}{x}, \quad f(e) = 2 \ln e = 2, \quad f'(e) = \frac{2}{e}; \quad y = 2 + \frac{2}{e}(x-e) = \frac{2}{e}x;$$

$$\text{г)} f'(x) = (\log_2(x-1))' = \frac{1}{\ln 2(x-1)}, \quad f(2) = \log_2 1 = 0, \quad f'(2) = \frac{1}{\ln 2};$$

$$y = \frac{1}{\ln 2}(x-2) = \frac{x}{\ln 2} - \frac{2}{\ln 2}.$$

$$\mathbf{553.} \text{ а)} \int_1^7 \frac{2dx}{x} = 2 \ln|x| \Big|_1^7 = 2 \ln 7 - 2 \ln 1 = 2 \ln 7; \quad \text{б)} \int_{-1}^1 \frac{dx}{3-2x} = -\frac{1}{2} \ln|3-2x| \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{2} \ln 5;$$

$$\text{в)} \int_1^e \frac{dx}{x} = \ln|x| \Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1; \quad \text{г)} \int_0^3 \frac{dx}{3x+1} = \frac{1}{3} \ln|3x+1| \Big|_0^3 = \frac{1}{3} \ln 10 - \frac{1}{3} \ln 1 = \frac{1}{3} \ln 10.$$

554.

$$\text{а)} y' = \left(\frac{\ln(5+3x)}{x^2+1} \right)' = \frac{\frac{1}{5+3x} \cdot (x^2+1) \cdot 3 - \ln(5+3x) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{3(x^2+1) - 2x(5+3x)\ln(5+3x)}{(x^2+1)^2(5+3x)};$$

$$\text{б)} y' = \left(\frac{\sqrt{x}}{\lg(1-2x)} \right)' = \left(\frac{\sqrt{x} \ln 10}{\ln(1-2x)} \right)' = \frac{\frac{\ln 10 \cdot \ln(1-2x)}{2\sqrt{x}} + \frac{2 \ln 10 \sqrt{x}}{1-2x}}{\ln^2(1-2x)} =$$

$$= \frac{\ln 10((1-2x)\ln(1-2x) + 4x)}{2\sqrt{x}(1-2x)\ln^2(1-2x)};$$

$$\text{в)} y' = \left(\frac{x^2}{\ln 5x} \right)' = \frac{2x \ln 5x - x^2 \cdot \frac{1}{5x} \cdot 5}{\ln^2 5x} = \frac{x(2 \ln 5x - 1)}{\ln^2 5x};$$

$$\text{г)} y' = \left(\frac{\log_3 x^2}{x+1} \right)' = \left(\frac{2 \ln x}{(\ln 3)(x+1)} \right)' = \frac{2}{\ln 3} \cdot \frac{\frac{1}{x}(x+1) - \ln x}{(x+1)^2} = \frac{2}{\ln 3} \cdot \frac{x(1 - \ln x) + 1}{x(x+1)^2}.$$

$$555. \text{ а) } f(x) = \sqrt{x} \ln x; D(f) = (0; \infty); f'(x) = \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}}, D(f') = (0; \infty);$$

$$f'(x) = 0 \text{ при } x = \frac{1}{e^2}, f(x) \text{ убывает на } \left(0; \frac{1}{e^2}\right], f(x) \text{ возрастает на } \left[\frac{1}{e^2}; \infty\right),$$

$$x = \frac{1}{e^2} - \min f(x) \text{ и } f\left(\frac{1}{e^2}\right) = -\frac{2}{e};$$

$$\text{б) } f(x) = \frac{\ln x}{x}; D(f) = (0; \infty); f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}, D(f') = (0; \infty);$$

$$f'(x) = 0 \text{ при } x = e, f(x) \text{ возрастает на } (0; e], f(x) \text{ убывает на } [e; \infty); x = e - \text{ точка } \max f(x) \text{ и } f(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e};$$

$$\text{в) } y = 2x - \ln x; D(f) = (0; \infty); f'(x) = 2 - \frac{1}{x} = \frac{2(x - 0,5)}{x}, D(f') = (-\infty; 0) \cup (0; \infty);$$

$$f'(x) = 0 \text{ при } x = 0,5; f(x) \text{ убывает на } (0; 0,5], f(x) \text{ возрастает на } [0,5; \infty), \\ \text{т. } x = 0,5 - \min f(x) \text{ и } f(0,5) = 1 + \ln 2;$$

$$\text{г) } f(x) = x \ln x; D(f) = (0; \infty); f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1; D(f') = (0; \infty);$$

$$f'(x) = 0 \text{ при } x = \frac{1}{e}, f(x) \text{ убывает на } \left(0; \frac{1}{e}\right], f(x) \text{ возрастает на } \left[\frac{1}{e}; \infty\right),$$

$$x = \frac{1}{e} - \min f(x) \text{ и } f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}.$$

$$556. \text{ а) } f(x) = x \ln^2 x; D(f) = (0; \infty); f'(x) = \ln^2 x + 2x \ln x \cdot \frac{1}{x} = \ln x (\ln x + 2);$$

$$f'(x) = 0 \text{ при } x = 1 \text{ и } x = \frac{1}{e^2};$$

$$f(x) \text{ возрастает на } \left(0; \frac{1}{e^2}\right] \text{ и на } [1; \infty), f(x) \text{ убывает на } \left[\frac{1}{e^2}; 1\right];$$

$$x = \frac{1}{e^2} - \max f(x) \text{ и } f\left(\frac{1}{e^2}\right) = \frac{4}{e^2}, x = 1 - \min f(x) \text{ и } f(1) = 0;$$

$$\text{б) } f(x) = \frac{2x}{\lg x}; D(f) = (0; 1) \cup (1; \infty); f'(x) = \left(\frac{2x}{\lg x}\right)' = 2 \ln 10 \cdot \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x},$$

$$D(f') = (0; 1) \cup (1; \infty); f'(x) = 0 \text{ при } x = e; f(x) \text{ убывает на } (0, 1) \text{ и на } (1; e], \\ f(x) \text{ возрастает на } [e; \infty), x = e - \min f(x) \text{ и } f(e) = 2e \ln 10;$$

$$\text{в) } f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}; D(f) = (0; \infty); f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x}{(\sqrt{x})^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(2 - \ln x)}{x} = \frac{2 - \ln x}{2\sqrt{x^3}},$$

$D(f) = (0; \infty)$; $f'(x) = 0$ при $x = e^2$;

$f(x)$ возрастает на $(0; e^2]$, $f(x)$ убывает на $[e^2; \infty)$, $x = e^2 - \min f(x)$ и $f(e^2) = \frac{2}{e}$;

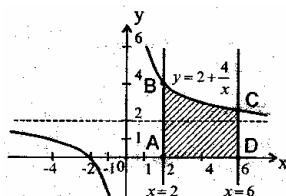
г) $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$; $D(f) = (0; \infty)$; $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x^2}$, $D(f') = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$;

$f'(x) = 0$ при $x = 1$;

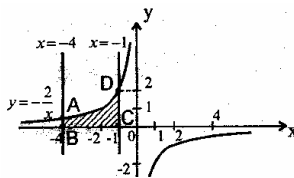
$f(x)$ убывает на $(0; 1]$, $f(x)$ возрастает на $[1; \infty)$, $x = 1 - \min f(x)$ и $f(1) = 1$.

557.

$$\text{a) } S_{ABCD} = \int_2^6 \left(2 + \frac{4}{x} \right) dx = \left(2x + 4 \ln|x| \right) \Big|_2^6 = 12 + 4 \ln 6 - 8 - 4 \ln 2 = 4 + 4 \ln 3;$$



$$\text{б) } S_{ABCD} = \int_{-4}^{-1} -\frac{2}{x} dx = -2 \ln|x| \Big|_{-4}^{-1} = -2(\ln 1 - \ln 4) = 4 \ln 2;$$

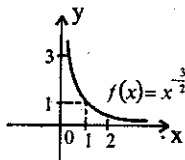


$$\text{в) } S = \int_{\frac{1}{4}}^2 \frac{1}{2x} dx = \frac{1}{2} \ln|x| \Big|_{\frac{1}{4}}^2 = \frac{1}{2} \left(\ln 2 - \ln \frac{1}{4} \right) = \frac{3}{2} \ln 2;$$

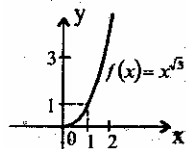
$$\text{г) } S = \int_{-6}^{-3} \left(3 - \frac{1}{x} \right) dx = \left(3x - \ln(-x) \right) \Big|_{-6}^{-3} = -9 - \ln 3 + 18 + \ln 6 = 9 + \ln 2.$$

43. Степенная функция

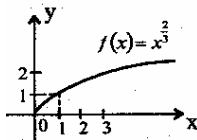
$$\text{558. a) } f(x) = x^{-\frac{3}{2}}; D(f) = (0; \infty); f'(x) = -\frac{3}{2} x^{-\frac{5}{2}};$$



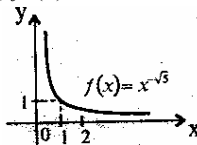
б) $f(x) = x^{\sqrt{3}}$; $D(f) = [0; \infty)$; $f'(x) = \sqrt{3}x^{\sqrt{3}-1}$;



в) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$; $D(f) = [0; \infty)$; $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$;

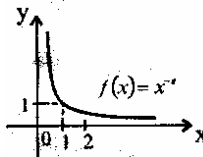


г) $f(x) = x^{-\sqrt{5}}$; $D(f) = (0; \infty)$; $f'(x) = -\sqrt{5} \cdot x^{-\sqrt{5}-1}$.

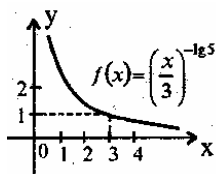


559.

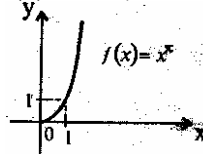
а) $f(x) = x^{-e}$; $D(f) = (0; \infty)$; $f'(x) = -ex^{-e-1}$;



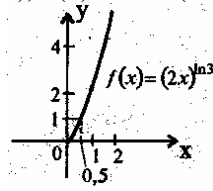
б) $f(x) = \left(\frac{x}{3}\right)^{-\lg 5}$; $D(f) = (0; \infty)$; $f'(x) = -\frac{1}{3}\lg 5 \cdot \left(\frac{x}{3}\right)^{-\lg 5-1}$;



в) $f(x) = x^{\pi}$; $D(f) = [0; \infty)$; $f'(x) = \pi x^{\pi-1}$;



г) $f(x) = (2x)^{\ln 3}$; $D(f) = [0; \infty)$; $f'(x) = 2 \cdot \ln 3 \cdot (2x)^{\ln 3 - 1}$.



560. а) $24^{\frac{1}{3}} = (27 - 3)^{\frac{1}{3}} = 3 \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 3 \cdot \left(1 - \frac{1}{9 \cdot 3}\right) = \frac{3 \cdot 26}{27} = 2 \frac{8}{9} \approx 2,89$;

б) $\sqrt[4]{625 \cdot 3} = 5 \sqrt[4]{3} = 5 \cdot \sqrt[4]{1,3^4 + 0,14} \approx 5 \cdot 1,3 \cdot \left(1 + \frac{0,14}{2,85} \cdot \frac{1}{4}\right) \approx 6,5 \cdot 1,01 \approx 6,57$;

в) $\sqrt[3]{81} = 3 \sqrt[3]{3} = 3 \sqrt[3]{1,4^3 + 0,25} \approx 3 \cdot 1,4 \cdot \left(1 + \frac{0,25}{3 \cdot 1,4^3}\right) \approx 4,2 \cdot 1,03 \approx 4,33$;

г) $\sqrt[4]{48} = 2 \sqrt[4]{3} = 2 \cdot \sqrt[4]{1,3^4 + 0,14} \approx 2 \cdot 1,3 \cdot \left(1 + \frac{0,14}{2,85 \cdot 4}\right) \approx 2,6 \cdot 1,01 \approx 2,63$.

561. а) $\sqrt[3]{30} = \sqrt[3]{27 + 3} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{9}\right)} \approx 3 \cdot \left(1 + \frac{1}{3 \cdot 9}\right) \approx 3,11$;

б) $\sqrt[4]{90} = \sqrt[4]{81 + 9} = \sqrt[4]{81} \cdot \sqrt[4]{1 + \frac{1}{9}} \approx 3 \cdot \left(1 + \frac{1}{4 \cdot 9}\right) \approx 3,08$;

в) $\sqrt{9,02} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{1 + \frac{2}{900}} \approx 3 \cdot \left(1 + \frac{1}{900}\right) \approx 3,003$;

г) $\sqrt[5]{33} = \sqrt[5]{32 + 1} = \sqrt[5]{32} \cdot \sqrt[5]{1 + \frac{1}{32}} \approx 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{5 \cdot 32}\right) \approx 2,01$.

562.

а) Т.к. $f(x) = x^{\frac{2}{5}}$ возрастает на \mathbb{R} , то $\min_{[1;32]} f(x) = f(1) = 1$, $\max_{[1;32]} f(x) = f(32) = 4$;

б) Т.к. $f(x) = x^{-\frac{4}{3}}$ убывает на \mathbb{R} , то

$\max_{\left[\frac{1}{8};27\right]} f(x) = f\left(\frac{1}{8}\right) = 16$, $\min_{\left[\frac{1}{8};27\right]} f(x) = f(27) = \frac{1}{81}$;

в) Т.к. $f(x) = x^{-4}$ убывает на \mathbb{R} , то $\max_{\left[\frac{1}{2};2\right]} f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 16$, $\min_{\left[\frac{1}{2};2\right]} f(x) = f(2) = \frac{1}{16}$;

г) т.к. $f(x) = x^{\frac{3}{4}}$ возрастает на \mathbb{R} , то

$$\min_{\left[\frac{1}{16}; 81\right]} f(x) = f\left(\frac{1}{16}\right) = \frac{1}{8}, \quad \max_{\left[\frac{1}{16}; 81\right]} f(x) = f(81) = 27.$$

563. а) $f(x) = -\frac{1}{2}x^{-\sqrt{2}}, F(x) = -\frac{x^{-\sqrt{2}+1}}{2(-\sqrt{2}+1)} + C = \frac{x^{1-\sqrt{2}}}{2(1-\sqrt{2})} + C;$

б) $f(x) = x^{2\sqrt{3}}, F(x) = \frac{x^{2\sqrt{3}+1}}{2\sqrt{3}+1} + C;$

в) $f(x) = 3x^{-1}, F(x) = 3\ln|x| + C;$ г) $f(x) = x^e, F(x) = \frac{x^{e+1}}{e+1} + C.$

564. а) $\int_1^4 x^{\frac{5}{2}} dx = \frac{2}{7} \cdot x^{\frac{7}{2}} \Big|_1^4 = \frac{2}{7} \left(2^{\frac{7}{2}} - 1^{\frac{7}{2}} \right) = \frac{2}{7} \cdot (2^7 - 1) = 36 \frac{2}{7};$

б) $\int_1^8 \frac{4dx}{x^3} = 4 \cdot \frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} \Big|_1^8 = 12 \left(\sqrt[3]{8} - \sqrt[3]{1} \right) = 12;$

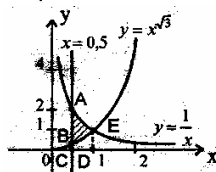
в) $\int_e^{e^2} 2x^{-1} dx = 2 \ln x \Big|_e^{e^2} = 2(\ln e^2 - \ln e) = 2;$

г) $\int_{\frac{1}{16}}^{\frac{81}{4}} 5x^{\frac{1}{4}} dx = 5 \cdot \frac{x^{\frac{1}{4}+1}}{\frac{1}{4}+1} \Big|_{\frac{1}{16}}^{\frac{81}{4}} = 4 \left(3^{\frac{5}{4}} - 2^{\frac{5}{4}} \right) = 4 \cdot 211 = 844.$

565. а) $S = \int_0^1 x^{\sqrt{2}} dx = \frac{x^{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2}+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}+1};$

б) $S_{ABE} = S_{ACDE} - S_{BCDE} = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x} dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 x^{\sqrt{3}} dx = \left(\ln x - \frac{x^{\sqrt{3}+1}}{\sqrt{3}+1} \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^1 =$

$= -\frac{1}{\sqrt{3}+1} - \ln \frac{1}{2} + \frac{2^{-\sqrt{3}-1}}{\sqrt{3}+1} = \frac{2^{-\sqrt{3}-1} - 1}{\sqrt{3}+1} + \ln 2;$



$$\text{в) } S = \int_1^{32} x^{-0,8} dx = \frac{x^{-0,8+1}}{-0,8+1} \Big|_1^{32} = 5 \sqrt[5]{x} \Big|_1^{32} = 5(\sqrt[5]{32} - 1) = 5;$$

$$\text{г) } S = \int_3^5 \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_3^5 = \ln 5 - \ln 3.$$

566.

$$2) \sqrt{2} \approx 1,4142, \sqrt[3]{3} \approx 1,4422, \sqrt{3} \approx 1,7321, \sqrt[4]{2,5} \approx 1,2574, \sqrt[3]{2,5} \approx 1,3572, \sqrt[4]{3} \approx 1,3161, \\ \sqrt{2,5} \approx 1,5811, \sqrt[4]{2} \approx 1,1892.$$

$$3) \sqrt{2} = \sqrt{1,4^2 + 0,04} = \sqrt{1,4^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{0,04}{1,96}} \approx 1,4 \left(1 + \frac{0,04}{2 \cdot 1,96} \right) \approx 1,4143;$$

$$\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{1,4^3 + 0,256} = \sqrt[3]{1,4^3} \cdot \sqrt[3]{1 + \frac{0,256}{2,744}} \approx 1,4 \left(1 + \frac{0,256}{3 \cdot 2,744} \right) \approx 1,4435;$$

$$\sqrt{3} = \sqrt{1,3^4 + 0,1439} = \sqrt{1,3^4} \cdot \sqrt{1 + \frac{0,1439}{2,8561}} \approx 1,69 \left(1 + \frac{0,1439}{2 \cdot 2,8561} \right) \approx 1,7326;$$

$$\sqrt[4]{2,5} = \sqrt[4]{1,25^4 + \frac{15}{256}} = \sqrt[4]{1,25^4} \cdot \sqrt[4]{1 + \frac{15}{256 \cdot 2,4414}} \approx 1,25 \left(1 + \frac{15}{4 \cdot 256 \cdot 2,4414} \right) \approx 1,2575;$$

$$\sqrt[3]{2,5} = \sqrt[3]{1,3^3 + 0,303} = \sqrt[3]{1,3^3} \cdot \sqrt[3]{1 + \frac{0,303}{2,197}} \approx 1,3 \left(1 + \frac{0,303}{3 \cdot 2,197} \right) \approx 1,3598;$$

$$\sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{1,3^4 + 0,1439} = \sqrt[4]{1,3^4} \cdot \sqrt[4]{1 + \frac{0,1439}{2,8561}} \approx 1,3 \left(1 + \frac{0,1439}{4 \cdot 2,8561} \right) \approx 1,3164;$$

$$\sqrt{2,5} = \sqrt{1,6^2 - 0,06} = \sqrt{1,6^2} \cdot \sqrt{1 - \frac{0,06}{2,56}} \approx 1,6 \left(1 - \frac{0,06}{2 \cdot 2,56} \right) \approx 1,5813;$$

$$\sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{1,2^4 - 0,0736} = \sqrt[4]{1,2^4} \cdot \sqrt[4]{1 - \frac{0,0736}{2,0736}} \approx 1,2 \left(1 - \frac{0,0736}{2 \cdot 2,0736} \right) \approx 1,1787.$$

567. а) нет; б) нет; в) нет; г) да, т.к. $x \geq 0$ и $\min_{x \geq 0} f(x) = f(0) = 0$

44. Понятие о дифференциальных уравнениях

$$\text{568. а) } y'(t) = -6\sin(2t + \pi), y''(t) = -12\cos(2t + \pi);$$

$$-12\cos(2t + \pi) = -12 \cdot \cos(2t + \pi);$$

$$\text{б) } y'(t) = 2\cos\left(\frac{1}{2}t - \frac{\pi}{3}\right), y''(t) = -\sin\left(\frac{1}{2}t - \frac{\pi}{3}\right);$$

$$-\sin\left(\frac{1}{2}t - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{4} \cdot 4\sin\left(\frac{1}{2}t - \frac{\pi}{3}\right);$$

$$\text{в) } y'(t) = -8\sin 4t, y''(t) = -32\cos 4t; -32\cos 4t + 32 \cdot \cos 4t = 0;$$

$$\text{г) } y'(t) = \frac{1}{30}\cos(0,1t + 1), y''(t) = -\frac{1}{300}\sin(0,1t + 1);$$

$$-\frac{1}{300}\sin(0,1t + 1) + \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{3}\sin(0,1t + 1) = 0.$$

$$\text{569. } y'(x) = 15e^{3x}, 15e^{3x} = 3 \cdot 5 \cdot e^{3x}.$$

$$\text{570. } y'(x) = -14e^{-2x}, -14e^{-2x} = -2 \cdot 7e^{-2x}.$$

$$\text{571. } y'(x) = -21e^{-7x}, -21e^{-7x} = -7 \cdot 3e^{-7x}.$$

572. а) очевидно, что $y = A\sin kx$ – решение;

$$y'(x) = A \cdot k \cos kx, y''(x) = -Ak^2 \sin kx;$$

$$y'' + 25y = 0 \Rightarrow -Ak^2 \sin kx + 25A \sin kx = 0, \sin kx(25 - k^2) = 0; k = \pm 5;$$

$$y(x) = A \sin 5x, \text{ где } A - \text{const};$$

б) очевидно, что $y = A\sin kx$ – решение;

$$\frac{1}{9}y'' + 4y = 0 \Rightarrow -\frac{A}{9}k^2 \sin kx + 4A \sin kx = 0, \sin kx(36 - k^2) = 0, k = \pm 6;$$

$$y(x) = A \sin 6x, A - \text{const};$$

в) очевидно, что $y = A\sin kx$ – решение;

$$4y'' + 16y = 0 \Rightarrow -4Ak^2 \sin kx + 16A \sin kx = 0, \sin kx(4 - k^2) = 0, k = \pm 2;$$

$$y(x) = A \sin 2x; A - \text{const};$$

г) очевидно, что $y = A\sin kx$ – решение;

$$y'' = -\frac{1}{4}y \Rightarrow -Ak^2 \sin kx + \frac{1}{4}A \sin kx = 0, \sin kx\left(\frac{1}{4} - k^2\right) = 0, k = \pm \frac{1}{2};$$

$$y(x) = A \sin \frac{kx}{2}; A - \text{const}.$$

$$\text{573. а) } x' = -4\sin(2t - 1), x'' = -8\cos(2t - 1);$$

$$-8\cos(2t - 1) + 4 \cdot 2\cos(2t - 1) = 0 \text{ или } x'' + 4x = 0;$$

$$\text{б) } x' = -0,64\sin\left(0,1t + \frac{\pi}{7}\right), x'' = -0,064\cos\left(0,1t + \frac{\pi}{7}\right);$$

$$-0,064\cos\left(0,1t + \frac{\pi}{7}\right) + 0,01 \cdot 6,4\cos\left(0,1t + \frac{\pi}{7}\right) = 0$$

$$\text{или } x'' + 0,01x = 0;$$

$$\text{в) } x = 4\sin\left(3t - \frac{\pi}{4}\right); x' = 12\cos\left(3t - \frac{\pi}{4}\right);$$

$$x'' = -36\sin\left(3t - \frac{\pi}{4}\right); -36\sin\left(3t - \frac{\pi}{4}\right) + 9 \cdot 4\sin\left(3t - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\text{или } x'' + 9x = 0;$$

$$\text{г) } x' = 0,213\cos(0,3t - 0,7), x'' = -0,0639\sin(0,3t - 0,7);$$

$$-0,0639\sin(0,3t - 0,7) + 0,09 \cdot 0,071\sin(0,3t - 0,7) = 0 \text{ или } x'' + 0,09x = 0.$$

574.

а) Пусть $x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$ – периодическая функция с наименьшим положительным периодом T .
 $x(t + T) = A_1 \cos(\omega_1 t + \omega_1 T + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \omega_2 T + \varphi_2) =$
 $= A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) = x(t)$.

Если это выполнено при любых t и φ , то

$$\begin{cases} \omega_1 T = 2\pi k, \\ \omega_2 T = 2\pi n, \end{cases} \text{ у } k \in \mathbb{Z}; \Rightarrow \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{k}{n} = r - \text{рациональное число при } n \text{ и } k \in \mathbb{Z}.$$

575. Зависимость массы вещества от времени: $m(t) = m_0 e^{-kt}$.

По условию $n = m e^{-kt}$, $\ln \frac{m}{n} = kt$, $k = \frac{1}{t} (\ln m - \ln n)$; период полураспада

радия T находим из условия: $\frac{m}{2} = m e^{-kT}$,

$$T = \frac{\ln 2}{k} \text{ или } T = \frac{\ln 2}{\frac{1}{t} (\ln m - \ln n)} = \frac{r \ln 2}{\ln m - \ln n}.$$

$$\mathbf{576.} \quad m_1 = m_0 e^{-kt} \Rightarrow t = \frac{1}{k} \ln \frac{m_0}{m_1}; \quad k = \frac{\ln 2}{T}, \quad t = \frac{T}{\ln 2} \ln \frac{m_0}{m_1} = \frac{3}{\ln 2} \cdot \ln \frac{1}{0,125} = 9 \text{ мин.}$$

$$\mathbf{577.} \quad m_1 = m_0 e^{-kt}, \quad t = \frac{T}{\ln 2} \cdot \ln \frac{m_0}{m_1}; \quad \text{при } \frac{m_0}{m_1} = 10, \quad T = 1 \text{ ч.} \therefore t = \frac{1}{\ln 2} \ln 10 = 3,3 \text{ ч.};$$

$$\frac{m_1}{m_0} = e^{-\frac{\ln 2}{T} t}, \text{ если } t = 100 \text{ лет и } T = 1500 \text{ лет, то } \frac{m_1}{m_0} = e^{-\ln 2 \frac{1000}{1500}} \approx 0,64.$$

578.

$$T' = -k(T - T_1), \quad T_1 = 0.$$

Решение этого уравнения $T(t) = T_0 e^{-kt}$, где $k > 0 - \text{const}$.

Для первого тела $T^{(1)}(t) = T_0^{(1)} e^{-k_1 t}$, для второго тела $T^{(2)}(t) = T_0^{(2)} e^{-k_2 t}$;

через время t_1 температура 1 тела была $T_1^{(1)}$, температура 2 тела $T_1^{(2)}$:

$$T_1^{(1)} = T_0^{(1)} e^{-k_1 t_1}, \quad k_1 t_1 = \ln \frac{T_0^{(1)}}{T_1^{(1)}}, \quad k_1 = \frac{1}{t_1} \ln \frac{T_0^{(1)}}{T_1^{(1)}}; \quad T_1^{(2)} = T_0^{(2)} e^{-k_2 t_1}, \quad k_2 = \frac{1}{t_1} \ln \frac{T_0^{(2)}}{T_1^{(2)}};$$

момент времени t , когда температуры тел сравняются, находим из условия

$$T^{(1)}(t) = T^{(2)}(t): T_0^{(1)} e^{-\frac{t}{t_1} \ln \frac{T_0^{(1)}}{T_1^{(1)}}} = T_0^{(2)} e^{-\frac{t}{t_1} \ln \frac{T_0^{(2)}}{T_1^{(2)}}}, \quad \frac{T_0^{(1)}}{T_0^{(2)}} = e^{-\frac{t}{t_1} \left[\ln \frac{T_0^{(2)}}{T_1^{(2)}} - \ln \frac{T_0^{(1)}}{T_1^{(1)}} \right]},$$

$$\frac{t}{t_1} \cdot \ln \frac{T_0^{(2)} \cdot T_1^{(1)}}{T_0^{(1)} \cdot T_1^{(2)}} = \ln \frac{T_0^{(2)}}{T_0^{(1)}}, \quad t = t_1 \frac{\ln \frac{T_0^{(2)}}{T_0^{(1)}}}{\ln \frac{T_0^{(2)} T_1^{(1)}}{T_0^{(1)} T_1^{(2)}}};$$

при $t_1 = 10$ мин, $T_0^{(1)} = 200^\circ\text{C}$, $T_0^{(2)} = 100^\circ\text{C}$, $T_1^{(2)} = 80^\circ\text{C}$, $T_1^{(1)} = 100^\circ\text{C}$;

$$t = 10 \cdot \frac{\ln \frac{1}{2}}{\ln \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{10}{8} \right)} = 10 \frac{\ln 2}{\ln 1,6} \approx 14,75 \text{ мин.}$$

579.

См. задачу 578.

$$T^{(1)}(t) = T_0^{(1)} e^{-\frac{t}{t_1} \ln \frac{T_0^{(1)}}{T_1^{(1)}}} \quad \text{и} \quad T^{(2)}(t) = T_0^{(2)} e^{-\frac{t}{t_1} \ln \frac{T_0^{(2)}}{T_1^{(2)}}};$$

$$\Delta T = T^{(1)}(t) - T^{(2)}(t) = e^{\ln T_0^{(1)} - \frac{t}{t_1} \ln \frac{T_0^{(1)}}{T_1^{(1)}}} - e^{\ln T_0^{(2)} - \frac{t}{t_1} \ln \frac{T_0^{(2)}}{T_1^{(2)}}};$$

при $\Delta T = 25^\circ\text{C}$, $T_0^{(1)} = T_0^{(2)} = 100^\circ\text{C}$, $T_1^{(1)} = 80^\circ\text{C}$, $T_1^{(2)} = 64^\circ\text{C}$; $t_1 = 10$ мин;

$$25 = 100 e^{-\frac{t}{10} \ln \frac{10}{8}} - 100 e^{-\frac{t}{10} \ln \frac{100}{64}}; \quad 25 = 100 \cdot (0,8)^{\frac{t}{10}} - 100 \cdot (0,64)^{\frac{t}{10}};$$

$$(0,8)^{\frac{2t}{10}} - (0,8)^{\frac{t}{10}} + 0,25 = 0, \quad \left((0,8)^{\frac{t}{10}} - 0,5 \right)^2 = 0; \quad (0,8)^{\frac{t}{10}} = 0,5;$$

$$\frac{t}{10} = \log_{0,8} 0,5; \quad t = 10 \log_{0,8} 0,5 = 10 \frac{\ln 0,5}{\ln 0,8} \approx 31,08 \text{ мин.}$$

580.

Т.к. $v'(t) = -kv(t) = -\frac{5}{3}v(t)$, и $v(0) = v_0$, то

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{5}{3}t}; \quad \text{при } v_0 = 30 \frac{\text{км}}{\text{ч}}, \quad t = 3 \text{ мин};$$

$$v(3) = 500 \cdot e^{-\frac{5}{3}t} = 500 e^{-5} \approx 3,4 \frac{\text{м}}{\text{мин}}.$$

ЗАДАЧИ НА ПОВТОРЕНИЕ

§ 1. Действительные числа

1. Рациональные и иррациональные числа

1. а) да; б) нет; в) нет; г) да

2.

Обозначим три последовательных натуральных числа: a ; $a + 1$; $a + 2$.
Сумма: $a + a + 1 + a + 2 = 3a + 3$ – делится на три, поскольку каждое слагаемое делится на три. Произведение этих чисел равно $a(a+1)(a+2)$. Одно из этих чисел делится на два, другое на три, значит, их произведение делится на шесть.

3. а) 52365; б) 52344.

4.

Число $10^{56} - 1$ содержит пятьдесят пять девяток, значит, оно делится на 3, 9. На 11 не делится. Поскольку, попробовав поделить на 11 столбиком, получим

$$\begin{array}{r} 99 \ 99 \dots\dots\dots 9 \quad | \quad \begin{array}{r} 11 \\ \hline 9 \end{array} \\ \underline{99} \quad \underline{99} \quad \underline{55 \text{ разрядов}} \quad \underline{909 \dots 909} \quad \underline{9} \\ \dots\dots\dots 99 \quad \quad \quad 54 \text{ разряда} \quad \quad \quad 11 \\ \quad \quad \quad 99 \\ \quad \quad \quad 09 \text{—остаток} \end{array}$$

5. 35.

6.

Предположим, число $\frac{ab}{a+b}$ сократима на число d , d – делитель ab ,

значит, существует общий делитель c или у чисел a и d , или у чисел b и d . Пусть c – делитель a и d , тогда $a + b$ делится на c ,

следовательно, b делится на c , значит, дробь $\frac{a}{b}$ сократима на c , что

противоречит условию. В случае, если c – делитель у чисел b и d , рассуждения аналогичные.

7.

а) $|a| = \begin{cases} a, & \text{при } a \geq 0, \\ -a, & \text{при } a < 0; \end{cases} \quad |-a| = \begin{cases} -a, & \text{при } a < 0, \\ a, & \text{при } a \geq 0; \end{cases} \quad \text{поэтому, } |a| = |-a|;$

$$\text{б) } |x| = \begin{cases} x, & \text{при } x \geq 0, \\ -x, & \text{при } x < 0; \end{cases} \quad \text{для } x \geq 0 \text{ получим}$$

$$|x| = x, \text{ для } x < 0 \text{ получим } x < |x|;$$

$$\text{в) } |x|^2 = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \geq 0, \\ (-x)^2, & \text{если } x < 0; \end{cases} \quad \text{но } x^2 = (-x)^2; \text{ значит, } |x|^2 = x^2.$$

8.

$$\text{а) } \frac{2,75 : 1,1 + 3\frac{1}{3}}{2,5 - 0,4(-3\frac{1}{3})} = \frac{2,5 + 3\frac{1}{3}}{2,5 + \frac{4}{3}} = \frac{\frac{5}{2} + \frac{10}{3}}{\frac{5}{2} + \frac{4}{3}} = \frac{\frac{5 \cdot 3 + 10 \cdot 2}{6}}{\frac{5 \cdot 3 + 4 \cdot 2}{6}} = \frac{35}{23};$$

$$\text{б) } \frac{3\frac{1}{3} : 10 + 0,175 : \frac{7}{20}}{1\frac{3}{4} - 1\frac{11}{17} \cdot \frac{51}{56}} = \frac{\frac{10}{3} : 10 + \frac{7}{40} : \frac{7}{20}}{\frac{7}{4} - \frac{28 \cdot 51}{17 \cdot 56}} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{\frac{7}{4} - \frac{3}{2}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{4}} = \frac{20}{6} = 3\frac{1}{3};$$

$$\begin{aligned} \text{в) } (1,4 - 3,5 : 1\frac{1}{4}) : 2,4 + 3,4 : 2\frac{1}{8} &= \left(\frac{7}{5} - \frac{7 \cdot 4}{2 \cdot 5}\right) : \frac{12}{5} + \frac{17 \cdot 8}{5 \cdot 17} = \\ &= \left(\frac{7}{5} - \frac{14}{5}\right) : \frac{12}{5} + \frac{8}{5} = -\frac{7 \cdot 5}{5 \cdot 12} + \frac{8}{5} = \frac{-7 \cdot 5 + 8 \cdot 12}{5 \cdot 12} = \frac{96 - 35}{60} = \frac{61}{60} = 1\frac{1}{60}; \end{aligned}$$

$$\text{г) } \frac{1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{0,25}}{6 - \frac{46}{1 + 2,2 \cdot 10}} = \frac{1 + 2}{6 - \frac{46}{23}} = \frac{3}{4} = 0,75.$$

9.

$$\text{а) } \frac{0,5^2 - 0,5}{0,4^2 + 0,1^2 + 2 \cdot 0,4 \cdot 0,1} = \frac{0,5(0,5 - 1)}{(0,4 + 0,1)^2} = \frac{(-0,5) \cdot 0,5}{0,5^2} = -1;$$

$$\text{б) } \frac{1,2^2 - 1,8^2}{1,2 \cdot 0,2 - 1,2 \cdot 0,8} = \frac{(1,2 + 1,8)(1,2 - 1,8)}{1,2(0,2 - 0,8)} = \frac{3 \cdot (-0,6)}{1,2 \cdot (-0,6)} = \frac{3 \cdot 5}{6} = 2,5;$$

$$\text{в) } \frac{0,6^2 + 0,1^2 - 2 \cdot 0,6 \cdot 0,1}{1,5 - 1,5^2} = \frac{(0,6 - 0,1)^2}{1,5(1 - 1,5)} = \frac{0,5^2}{1,5 \cdot (-0,5)} = -\frac{0,5}{1,5} = -\frac{1}{3};$$

$$\begin{aligned} \text{г) } \left(1\frac{3}{5}\right)^2 - \left(4\frac{5}{8} - 2,4\right) : \frac{5}{8} &= \left(\frac{8}{5}\right)^2 - \left(4\frac{5}{8} - 2\frac{2}{5}\right) \cdot \frac{8}{5} = \frac{8}{5} \left(\frac{8}{5} - 4\frac{5}{8} + \frac{12}{5}\right) = \\ &= \frac{8}{5} \left(4 - 4\frac{5}{8}\right) = \frac{8}{5} \cdot \left(-\frac{5}{8}\right) = -1. \end{aligned}$$

10.

а) $3,82 \pm 0,1$ – верные цифры – 3 и 8;

б) $1,980 \cdot 10^4 \pm 0,001 \cdot 10^4$ – верные цифры 1 и 9;

в) $7,891 \pm 0,1$ – верные цифры – 7, 9 и 1;

г) $2,8 \cdot 10^4 \pm 0,3 \cdot 10^4$ – верных цифр нет.

11.

а) $1,002^5 = (1 + 0,002)^5 \approx 1 + 5 \cdot 0,002 = 1 + 0,01 = 1,01$;

б) $0,997^4 = (1 - 0,003)^4 \approx 1 - 4 \cdot 0,003 = 1 - 0,012 = 0,988$;

в) $2,004^3 = 8(1 + 0,002)^3 \approx 8(1 + 0,006) = 8,048$;

г) $3,01^5 = 3^5 \left(1 + \frac{0,01}{3}\right)^5 = 243 \cdot \left(1 + \frac{1}{300}\right)^5 \approx 243 \cdot \left(1 + \frac{1}{60}\right) = 247,05$.

12. а) 15,3; б) 30,7; в) 43,7; г) 3,0.

13.

а) $2,(3) = 2\frac{1}{3}$; б) $0,(66) = \frac{2}{3}$; в) $1,0(8) = 1\frac{8}{90}$; г) $1,(33) = 1\frac{1}{3}$.

14.

а) Пусть $\sqrt{5} = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, $\frac{p}{q}$ – несократимая дробь;

$\frac{p}{q} > 0$, поэтому p и q натуральные числа. Тогда $5 = \frac{p^2}{q^2}$, то есть $p^2 = 5q^2$,

откуда следует, что p^2 . Таким образом, и p делится на 5, или $p = 5k$. Подставляя $p = 5k$ в равенство $p^2 = 5q^2$, получим $25k^2 = 5q^2$, $q^2 = 5k^2$.

Получим, что и q делится на 5. Это противоречит тому, что $\frac{p}{q}$ –

несократима, значит предположение неверно и $\sqrt{5}$ иррационально.

б) $2\sqrt{7}$ рациональное, если $\sqrt{7}$ – число рациональное. Пусть

$\sqrt{7} = \frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $\frac{m}{n}$ – несократимая дробь; $\frac{m}{n} > 0$, поэтому

можно считать, что m и n – натуральные числа. Тогда $7 = \frac{m^2}{n^2}$, то есть

$m^2 = 7n^2$, значит, что m^2 , следовательно, и m делятся на 7, то есть $m = 7k$. Подставляя $m = 7k$ в равенство $m^2 = 7n^2$, получаем $49k^2 = 7n^2$, $n^2 = 7k^2$.

Отсюда видно, что и n делится на 7. Дробь $\frac{m}{n}$ сократима на 7.

Предположение неверно, $2\sqrt{7}$ – иррационально.

в) Пусть $\sqrt{5} + 1 = r$ (где r – рационально), тогда $\sqrt{5} = r - 1$ рационально, это противоречит иррациональности $\sqrt{5}$.

г) $\frac{\sqrt{7}}{3} = \frac{1}{3}\sqrt{7}$ не рационально, т.к. $\sqrt{7}$ иррационально.

15. а) то $a + b$ и $a \cdot b$ числа рациональные.

б) то $a + b$ также число иррациональное (кроме случая $a = -b$), а $a \cdot b$ может быть как рациональным, так и иррациональным. (Например: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{14}$ – иррациональное, $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$ – рациональное).

в) $a + b$ – иррациональное число, $a \cdot b$ – иррациональное число.

16. а) $\sqrt{2} + \frac{5}{9} \approx 1,42 + 0,55 = 1,97$; б) $\sqrt{5} - \frac{2}{7} \approx 2,24 - 0,29 = 1,95$;

в) $\sqrt{3} + \frac{5}{9} \approx 1,72 + 0,55 = 2,27$; г) $\sqrt{6} - \frac{1}{11} \approx 2,45 - 0,09 = 2,36$.

17. а) -2 – рациональное, $-1,7$ – рациональное, $\frac{\pi}{3}$ – иррациональное,

$\sqrt{3}$ – иррациональное;

б) $-\sqrt{5}$ – иррациональное, -1 – рациональное, $\frac{5}{6}$ – рациональное,

$\log_2 3$ – иррациональное;

в) $-\frac{\sqrt{5}}{2}$ – иррациональное, $0, (2)$ – рациональное, $\frac{7}{6}$ – рациональное;

г) $-1, (6)$ – рациональное, $\lg 100$ – рациональное, e – иррациональное, $\sqrt{10}$ – иррациональное.

18. а) $4 < 7$ и $\lg \frac{1}{2} < 0$, поэтому $\frac{4}{\lg \frac{1}{10}} > \frac{7}{\lg \frac{1}{2}}$; $\sqrt{5} + 2 > 0$, $\sqrt{17} > 0$;

б) $(\sqrt{5} + 2)^2 = 5 + 4\sqrt{5} + 4 = 9 + 4\sqrt{5} > 17$, $(\sqrt{17})^2 = 17$, значит, $\sqrt{5} + 2 > \sqrt{17}$;

в) $\log_3 7 > 1$, $\log_7 3 = \frac{1}{\log_3 7} < 1$, значит, $\log_3 7 > \frac{1}{\log_7 3}$; $\log_3 7 > \log_7 3$;

г) $(\sqrt{7} + 3)^2 = 7 + 6\sqrt{7} + 9 = 16 + 6\sqrt{7} > 31$. $(\sqrt{31})^2 = 31$, значит, $\sqrt{7} + 3 > 31$. $\sqrt{7} + 3 > 31$.

19.

а) $15^{\log_3 10} = \left(5^{\log_{15} 10}\right)^{\frac{1}{\log_{15} 3}} = 10^{\log_3 15}$, значит, $15^{\log_3 10} = 10^{\log_3 5}$;

б) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 2 + 2\sqrt{6} + 3 = 5 + 2\sqrt{6} < 10$,

$(\sqrt{30} - \sqrt{3})^2 = 30 - 2\sqrt{90} + 3 = 33 - 2\sqrt{90} > 13$, значит,

$(\sqrt{2} + \sqrt{3}) < (\sqrt{30} - \sqrt{3})$;

в) $7,98 - 2\pi \approx 7,98 - 6,28 \approx 1,70$; $\frac{\pi}{2} < 2,1 < \pi$, $\frac{\pi}{2} < 1,7 < \pi$; поскольку

на $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ $\sin x$ – убывающая функция, то $\sin 2,1 < \sin 7,98$;

г) $(\sqrt{8} + \sqrt{5})^2 = 8 + 2\sqrt{40} + 5 = 13 + 4\sqrt{10}$, $(\sqrt{3} + \sqrt{10})^2 = 3 + 2\sqrt{30} + 10 = 13 + 2\sqrt{30}$, значит, $\sqrt{8} + \sqrt{5} > \sqrt{3} + \sqrt{10}$.

20.

а) $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} - 2\sqrt{6} = \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2}{3 - 2} - 2\sqrt{6} = 3 + 2\sqrt{6} + 2 - 2\sqrt{6} = 5$;

б) $(\sqrt{2} + 1)^2 + (1 - \sqrt{2})^2 - (\sqrt{7} + 1)(\sqrt{7} - 1) = 2 + 2\sqrt{2} + 1 + 1 - 2\sqrt{2} + 2 - 7 + 1 = 0$;

в) $\frac{\sqrt{7} + \sqrt{5}}{\sqrt{7} - \sqrt{5}} - \sqrt{35} = \frac{(\sqrt{7} + \sqrt{5})^2}{2} - \sqrt{35} = 6 + \sqrt{35} - \sqrt{35} = 6$;

г) $(3\sqrt{18} + 2\sqrt{8} + 4\sqrt{50}) : \sqrt{2} = (9\sqrt{2} + 4\sqrt{2} + 20\sqrt{2}) : \sqrt{2} = 9 + 4 + 20 = 33$.

2. Проценты. Пропорция

21.

а) $320 - 100\%$, $x - 2,5\%$; $x = \frac{320 \cdot 2,5}{100} = 8$;

б) $2,5\% - 75$, $100\% - x$; $x = \frac{100 \cdot 75}{2,5} = 3000$;

в) $84 - 100\%$, $2,8 - x$; $x = \frac{2,8 \cdot 100}{84} = 3\frac{1}{3}\%$;

г) $35 - 100\%$, $x - 140\%$; $x = \frac{35 \cdot 140}{100} = 49$.

22.

За 1987 год выпуск продукции составил 104%, за следующий год прирост продукции составил 8% от выпущенного за 1 год. За два года прирост составил $8,32\% + 4\% = 12,32\%$, значит, средний ежегодный прирост продукции в течение двух лет составил $12,32\% : 2 = 6,16\%$.

23.

Пусть I число— $5x$, II число— $3x$, III число— $20x$ и IV число— $20x \cdot 0,15 = 3x$. По условию $5x + 20x + 3x - 3x = 375$, $x = 15$; I число—75; II число—45; III число—300, IV число—45.

24.

Пусть условная цена на овощи в начале осенне-зимнего периода составила 1, тогда в конце этого периода она составила 1,25 условных единиц.

$1,25 - 100\%$, $1 - x\%$; $x = \frac{1 \cdot 100}{1,25} = 80\%$. Поэтому, цену весной нужно снизить на 20%.

25. а) $12 : \frac{1}{8} = x : \frac{5}{6}$, $\frac{1}{8}x = \frac{12 \cdot 5}{6}$, $\frac{1}{8}x = \frac{5}{3}$, $x = \frac{40}{3}$;

б) $x : (-0,3) = 0,15 : 1,5$, $x : (-0,3) = 0,1$, $x = (-0,3) \cdot 0,1$, $x = -0,03$;

в) $\frac{0,13}{x} = \frac{26}{3\frac{1}{3}}$, $26x = \frac{13 \cdot 10}{100 \cdot 3}$, $x = \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 10} = \frac{1}{60}$;

г) $\frac{x}{2,5} = \frac{-6,2}{15}$, $x = \frac{2,5(-6,2)}{15} = -\frac{2,5 \cdot 6,2}{15}$, $x = -\frac{31}{30} = -1\frac{1}{30}$.

26. а) $\frac{x-2}{2,5} = \frac{6}{x}$, $x(x-2) = 15$, $x^2 - 2x - 15 = 0$, $x_1 = 5$, $x_2 = -3$; $(-3; 5)$;

б) $\frac{x}{x+5} = \frac{4,8}{1,2}$, $x = 4x + 20$, $-3x = 20$, $x = -6\frac{2}{3}$;

в) $\frac{x-3}{x-2} = \frac{6,5}{1,5}$, $(x-3)3 = (x-2)13$, $10x = 17$, $x = 1,7$;

г) $\frac{4-x}{1,2} = \frac{5}{x+3}$, $(4-x)(x+3) = 6$, $-x^2 + x + 12 = 6$,
 $x^2 - x - 6 = 0$, $x_1 = -2$, $x_2 = 3$; $(-2; 3)$.

27.

а) $\triangle ABC \sim \triangle EBK$ – по двум углам,

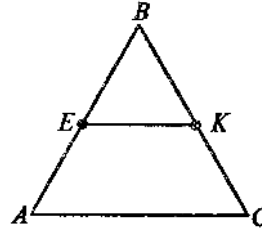
$$\frac{AB}{EB} = \frac{BC}{BK}, \quad EB = 22,5 - 18 = 4,5,$$

$$\frac{22,5}{4,5} = \frac{15}{BK}, \quad BK = \frac{4,5 \cdot 15}{22,5} = 3,$$

$$KC = 15 - 3 = 12;$$

б) $k = \frac{AB}{BE} = \frac{7,5}{7,5 - 5} = \frac{7,5}{2,5} = 3,$

$$k^2 = \frac{S_{ABC}}{S_{BEK}} = 9, \quad \frac{72}{S_{BEK}} = 9, \quad S_{BEK} = 8, \quad S_{AEKC} = 72 - 8 = 64.$$



3. Прогрессии

28. $S_{20} = \frac{a_1 + a_{20}}{2} \cdot 20, \quad a_7 = a_1 + 6d, \quad 20 = 2 + 6d, \quad d = 3,$

$$a_{20} = a_1 + 19d = 2 + 57 = 59, \quad S_{20} = \frac{2 + 59}{2} \cdot 20, \quad S_{20} = 61 \cdot 10 = 610.$$

29. $a_1 = 4, \quad a_6 = 40, \quad a_6 = a_1 + 5d, \quad 40 - 4 = 5d, \quad d = 7,2;$
 $a_2 = 11,2, \quad a_3 = 18,4, \quad a_4 = 25,6, \quad a_5 = 32,8.$

30. $\frac{1}{\log_3 2} = \log_2 3, \quad \frac{1}{\log_6 2} = \log_2 6 = \log_2 3 + \log_2 2 = \log_2 3 + 1,$

$$\frac{1}{\log_{12} 2} = \log_{12} 12 = \log_2 3 + \log_2 4 = \log_2 3 + 2. \quad \text{Значит, числа } \log_2 3;$$

$\log_2 3 + 1; \log_2 3 + 2$ образуют арифметическую прогрессию.

31. $\begin{cases} a_1 + a_5 = 26, \\ a_2 \cdot a_4 = 160; \end{cases} \begin{cases} a_1 + a_1 + 4d = 26, \\ (a_1 + d)(a_1 + 3d) = 160; \end{cases} \begin{cases} a_1 = 13 - 2d, \\ a_1^2 + 4a_1d + 3d^2 = 160; \end{cases}$

$$\begin{cases} a_1 = 13 - 2d, \\ (13 - 2d)^2 + 4 \cdot (13 - 2d) \cdot d + 3d^2 = 160; \end{cases}$$

$$169 - 52d + 4d^2 + 52d - 8d^2 + 3d^2 - 160 = 0, \quad -d^2 + 9 = 0, \quad d_1 = 3, \quad d_2 = -3,$$

$$a_1 = 7, \quad a_1 = 19. \quad a_6 = 7 + 15 = 22 \quad \text{или} \quad a_6 = 19 - 15 = 4.$$

$$S_6 = \frac{7 + 22}{2} \cdot 6 = 29 \cdot 3 = 87 \quad \text{или} \quad S_6 = \frac{19 + 4}{2} \cdot 6 = 23 \cdot 3 = 69.$$

32. Пусть $a = b_1$, тогда $b = b_1 \cdot q, \quad c = b_1 \cdot q^2, \quad d = b_1 \cdot q^3.$

$$(b_1 - b_1q^2)^2 + (b_1q - b_1q^2)^2 + (b_1q - b_1q^3)^2 - (b_1 - b_1q^3)^2 = b_1^2 - 2b_1^2q^2 +$$

$$+ b_1^2q^4 + b_1^2q^2 - 2b_1^2q^3 + b_1^2q^4 + b_1^2q^2 - 2b_1^2q^4 + b_1^2q^6 - b_1^2 + 2b_1^2q^3 - b_1^2q^6 = 0$$

$$33. \frac{1}{2-\sqrt{2}} : \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}-1}{(2-\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{1}{2+\sqrt{2}}.$$

Произведение второго числа на $\frac{1}{2+\sqrt{2}} : \frac{1}{2-\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2+\sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$

Получили третье число. Значит эти числа образуют геометрическую прогрессию.

$$34. \begin{cases} b_4 - b_2 = 24, \\ b_2 + b_3 = 6; \end{cases} \begin{cases} b_1 q^3 - b_1 q = 24, \\ b_1 q + b_1 q^2 = 6; \end{cases} \begin{cases} b_1 q(q^2 - 1) = 24, \\ b_1 q(1 + q) = 6; \end{cases}$$

$$6(q-1) = 24, \quad q-1 = 4, \quad q = 5, \quad 5b_1 = \frac{6}{1+5}, \quad 5b_1 = 1, \quad b_1 = \frac{1}{5}.$$

$$35. b_1 = 3, \quad b_2 = 12, \quad b_n = 3072; \quad q = \frac{b_2}{b_1} = 4, \quad b_n = b_1 \cdot q^{n-1},$$

$$3072 = 3 \cdot 4^{n-1}, \quad 4^{n-1} = 1024; \quad n-1 = 5, \quad n = 6.$$

$$36. b_4 = \frac{1}{54}, \quad q = \frac{1}{3}, \quad b_4 = b_1 \cdot q^3, \quad b_1 = b_4 : q^3 = \frac{1}{54} : \frac{1}{27} = \frac{1}{2},$$

$$S_n = \frac{b_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}, \quad \frac{121}{162} = \frac{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right)}{1 - \frac{1}{3}}, \quad \frac{121}{162} = \frac{3}{4} \left(3 - \frac{1}{3^n}\right), \quad 1 - \frac{1}{3^n} = \frac{121 \cdot 4}{162 \cdot 3},$$

$$-\frac{1}{3^n} = \frac{121 \cdot 4}{162 \cdot 3} - 1, \quad \frac{1}{3^n} = \frac{1}{243}, \quad n = 5.$$

37. Пусть искомые числа b_1, b_2, b_3, b_4 . По условию имеем

$$\begin{cases} b_2 + b_3 = 12, \\ b_1 + b_4 = 14, \end{cases} \quad \text{и} \quad b_4 = b_3 + (b_3 - b_2).$$

$$\begin{cases} b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 = 12, \\ b_1 + b_3 + (b_3 - b_2) = 14; \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 \cdot q(1 + q) = 12, \\ b_1 + 2b_3 - b_2 = 14; \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 \cdot q(1 + q) = 12, \\ b_1(1 + 2q^2 - q) = 14; \end{cases}$$

$$b_1 = \frac{14}{1 + 2q^2 - q} = \frac{12}{q(1 + q)}, \quad 14q + 14q^2 = 12 + 24q^2 - 12q,$$

$$10q^2 - 26q + 12 = 0, \quad 5q^2 - 13q + 6 = 0,$$

$$q_1 = 2, \quad q_2 = 0,6, \quad b_1 = 2 \quad \text{или} \quad b_1 = 12,5, \quad \text{или} \quad b_2 = 4, \quad b_2 = 7,5, \quad b_3 = 8, \quad \text{или} \\ b_3 = 4,5, \quad b_4 = 12, \quad \text{или} \quad b_4 = 1,5.$$

Ответ: 2; 4; 8; 12 или 12,5; 7,5; 4,5; 1,5.

$$38. q = \frac{2}{\sqrt{3}+1} : \sqrt{3} = \frac{2}{(\sqrt{3}+1)\sqrt{3}} = \frac{2}{3+\sqrt{3}} = \frac{2(3-\sqrt{3})}{9-3} = \frac{3-\sqrt{3}}{3} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$S = \frac{b_1}{1-q}, \quad \frac{\sqrt{3}}{1-1+\frac{\sqrt{3}}{3}} = 3. \text{ Ответ: } 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}; 3.$$

$$39. \begin{cases} \frac{b_1 \cdot (1-q^3)}{1-q} = 10,5, \\ \frac{b_1}{1-q} = 12; \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 \cdot (1+q+q^2) = 10,5, \\ b_1 = 12(1-q); \end{cases} \quad 12(1-q)(1+q+q^2) = 10,5,$$

$$12(1-q^3) = 10,5, \quad 1-q^3 = 10,5 : 12, \quad q^3 = \frac{1}{8},$$

$$q = \frac{1}{2}; \quad b_1 = 12 \cdot (1 - \frac{1}{2}) = 6. \text{ Ответ: } b_1 = 6; \quad q = \frac{1}{2}.$$

40.

Если $b > 0$, $b \neq -1$ и a^n, a^{n+k}, a^{n+2k} — геометрическая прогрессия, то $\log_b a^n, \log_b a^{n+k}, \log_b a^{n+2k}$ — арифметическая прогрессия, то $\log_b a^n + \log_b a^{2k} = \log_b a^{n+2k} = \log_b a^n + \log_b a^k = \log_b a^n + 2\log_b a^k$; значит, $\log_b a^n, \log_b a^n + \log_b a^k, \log_b a^n + 2\log_b a^k$ — арифметическая прогрессия.

§ 2. Тождественные преобразования

4. Преобразования алгебраических выражений

$$41. \text{ а) } a^2 + b^2 + 2a - 2b - 2ab = a^2 2ab + b^2 + 2(a-b) = (a-b)^2 + 2(a-b) = (a-b)(a-b+2);$$

$$\text{ б) } x^3 + (y-1)x + y = x^3 + xy - x + y = x(x^2-1) + y(x+1) = (x+1)(x^2-x+y);$$

$$\text{ в) } a^6 - 8 = (a^2)^3 - 2^3 = (a^2-2)(a^4+2a^2+4) = (a+\sqrt{2})(a-\sqrt{2})(a^4+2a^2+4);$$

$$\text{ г) } x^4 - x^2(y^2+1) + y^2 = x^4 - x^2y^2 - x^2 + y^2 = x^2(x^2-1) - y^2(x^2-1) = (x^2-1)(x^2-y^2) = (x+1)(x-1)(x+y)(x-y).$$

$$42. \text{ а) } n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n = n^2(n^2-1) + 2n(n^2-1) = (n^2-1)(n^2+2n) = (n^2-1) \cdot n \cdot (n+2) = (n-1) \cdot n(n+1)(n+2)$$

произведение четырех последовательных натуральных чисел делится на 2, 3, 4, а значит, делится и на 24 при $n = 2, 3, \dots$;

$$\text{ б) } (n^2+4n+3)(n^2+6n+8) = (n+3)(n+1)(n+2)(n+4) = (n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$$

это произведение четырех последовательных натуральных чисел, которое делится на 2, 3, 4, а значит, делится и на 24;

в) $n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n-1)n(n+1)$ — произведение трех последовательных натуральных чисел, которое делится на 2 и на 3, а значит, делится и на 6 при $n = 2, 3, \dots$;

г) $n^3 - 4n = n(n^2 - 4) = n(n-2)(n+2) = (n-2)n \cdot (n+2)$. Так как $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, то $(n-2)n(n+2) = (2k-2)2n(2k+2) = 2(k-1)2n \cdot 2(k+1) = 8(k-1)k(k+1)$ — это произведение делится на 8, на 3, на 2, а значит, делится на 48.

$$43. \text{ а) } \frac{a^3 + a^2 - a - 1}{a^2 + 2a + 1} = \frac{a^2(a+1) - (a+1)}{(a+1)^2} = \frac{(a+1)(a^2 - 1)}{(a+1)^2} = a - 1;$$

$$\text{б) } \frac{x^2 + x - 12}{x^2 + 8x + 16} = \frac{(x-3)(x-4)}{(x+4)^2} = \frac{x-3}{x+4};$$

$$\text{в) } \frac{2a^2 - 5a + 2}{ab - 2b - 3a + 6} = \frac{(a-2)(2a-1)}{a(b-3) - 2(b-3)} = \frac{(a-2)(2a-1)}{(a-2)(b-3)} = \frac{2a-1}{b-3};$$

$$\text{г) } \frac{x^3 - 27}{x^2y + 3xy + 9y} = \frac{(x-3)(x^2 + 3x + 9)}{y(x^2 + 3x + 9)} = \frac{x-3}{y}.$$

$$44. \text{ а) } \left(m + n - \frac{4mn}{m+n} \right) : \left(\frac{m}{m+n} - \frac{n}{n-m} - \frac{2mn}{m^2 - n^2} \right) = \frac{(m+n)^2 - 4mn}{m+n} :$$

$$: \frac{nm - m^2 - mn - n^2 - 2mn}{m^2 - n^2} = \frac{(m-n)^2}{m+n} : \frac{-(m+n)^2}{m^2 - n^2} =$$

$$= -\frac{(m-n)^2(m^2 - n^2)}{(m+n)(m+n)^2} = -\frac{(m-n)^3}{(m+n)^2};$$

$$\text{б) } \frac{a^3 + b^3}{a+b} : (a^2 - b^2) + \frac{2b}{a+b} - \frac{ab}{a^2 - b^2} = \frac{a^2 - ab + b^2}{a^2 - b^2} + \frac{2b(a-b)}{a^2 - b^2} -$$

$$- \frac{ab}{a^2 - b^2} = \frac{a^2 - ab + b^2 + 2ab - 2b^2 - ab}{a^2 - b^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - b^2} = 1;$$

$$\text{в) } \left(\frac{x}{x^2 - 4} - \frac{8}{x^2 + 2x} \right) \cdot \frac{x^2 - 2x}{4-x} + \frac{x+8}{x+2} = \frac{(x^2 - 8x + 16)}{x(x^2 - 4)} \cdot \frac{x(x-2)}{4-x} + \frac{x+8}{x+2} =$$

$$= \frac{(x-4)^2(x-2)}{(x^2 - 4)(4-x)} + \frac{x+8}{x+2} = \frac{4-x}{x+2} + \frac{x+8}{x+2} = \frac{12}{x+2};$$

$$\begin{aligned}
\text{r)} \quad & \left(\frac{1}{c^2+3c+2} + \frac{2c}{c^2+4c+3} + \frac{1}{c^2+5c+6} \right)^2 \cdot \frac{(c-3)^2+12c}{2} = \\
& = \left(\frac{1}{(c+1)(c+2)} + \frac{2c}{(c+1)(c+3)} + \frac{1}{(c+2)(c+3)} \right)^2 \cdot \frac{c^2-6c+9+12c}{2} = \\
& = \left(\frac{c+3+2c(c+2)+c+1}{(c+1)(c+2)(c+3)} \right)^2 \cdot \frac{(c+3)^2}{2} = \\
& = \left(\frac{2(c+1)(c+2)}{(c+1)(c+2)(c+3)} \right)^2 \cdot \frac{(c+3)^2}{2} = \frac{4 \cdot (c+3)^2}{(c+3)^2 \cdot 2} = 2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
45. \text{ a)} \quad & \left(\frac{3}{2x-y} - \frac{2}{2x+y} - \frac{1}{2x-5y} \right) : \frac{4y^2}{4x^2-y^2} = \left(\frac{6x+3y-4x+2y}{4x^2-y^2} - \frac{1}{2x-5y} \right) : \\
& : \frac{4y^2}{4x^2-y^2} = \left(\frac{2x+5y}{4x^2-y^2} - \frac{1}{2x-5y} \right) : \frac{4y^2}{4x^2-y^2} = \frac{4x^2-25y^2-4x^2+y^2}{(4x^2-y^2)(2x-5y)} : \\
& : \frac{4y^2}{4x^2-y^2} = \frac{-24y^2(4x^2-y^2)}{(4x^2-y^2)(2x-5y)4y^2} = \frac{-6}{2x-5y} = \frac{6}{5y-2x};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
6) \quad & \left(\frac{3}{a-3} + \frac{4}{a^2-5a+6} + \frac{2a}{a-2} \right) : \left(\frac{3}{2a+1} \right)^{-1} - \frac{a-12}{3(3-a)} = \\
& = \frac{3a-6+4+2a^2-6a}{(a-2)(a-3)} : \frac{2a+1}{3} - \frac{a-12}{3(3-a)} = \frac{2a^2-3a-2}{(a-2)(a-3)} : \frac{2a+1}{3} - \frac{a-12}{3(3-a)} = \\
& = \frac{(a-2)(2a+1)3}{(a-2)(a-3)(2a+1)} - \frac{a-12}{3(3-a)} = \frac{3}{a-3} + \frac{a-12}{3(a-3)} = \frac{9+a-12}{3(a-3)} = \frac{a-3}{3(a-3)} = \frac{1}{3},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{b)} \quad & \left(\frac{x^3-8}{x-2} + 2x \right) \cdot (4-x^2)^{-1} - \frac{x-1}{2-x} = (x^2+2x+4+2x) \cdot \frac{1}{4-x^2} - \frac{x-1}{2-x} = \\
& = \frac{(x+2)^2}{4-x^2} - \frac{x-1}{2-x} = \frac{x+2}{2-x} - \frac{x-1}{2-x} = \frac{3}{2-x};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{r)} \quad & \frac{k^2}{3+k} \cdot \frac{9-k^2}{k^2-3k} + \frac{27+k^3}{3-k} : \left(3 + \frac{k^2}{3-k} \right) = \frac{k^2}{3} \cdot \frac{(3-k)}{k(k-3)} + \frac{27+k^3}{3-k} : \\
& : \left(\frac{9-3k+k^2}{3-k} \right) = -k + \frac{(27+k^3)(3-k)}{k^2-3k+9} = -k+3+k=3.
\end{aligned}$$

**5. Преобразование выражений, содержащих радикалы
и степени с дробными показателями**

$$46. \text{ а) } \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{5})}{3-5} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{10}}{2} = \frac{\sqrt{10}-\sqrt{6}}{2};$$

$$\text{б) } \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{5-2} = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{6}}{3};$$

$$\text{в) } \frac{2}{\sqrt{15}} = \frac{2\sqrt{15}}{15}; \text{ г) } \frac{3}{\sqrt{7}+\sqrt{2}} = \frac{3(\sqrt{7}-\sqrt{2})}{7-2} = \frac{3(\sqrt{7}-\sqrt{2})}{5}.$$

$$47. \text{ а) } \sqrt{(\sqrt{5}-2,5)^2} - \sqrt[3]{(1,5-\sqrt{5})^3} - 1 = |\sqrt{5}-2,5| - (1,5-\sqrt{5}) = 2,5-\sqrt{5}-1,5+\sqrt{5}=1;$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \frac{(5\sqrt{3}+\sqrt{50})(5-\sqrt{24})}{(\sqrt{75}-5\sqrt{2})} &= \frac{(5\sqrt{3}+5\sqrt{2})^2(5-2\sqrt{6})}{75-50} = \\ &= \frac{(5\sqrt{3}+5\sqrt{2})^2(5-2\sqrt{6})}{25} = (5+2\sqrt{6})(5-2\sqrt{6}) = 25-24=1; \end{aligned}$$

$$\text{в) } (\sqrt{\sqrt{2}-1,5})^2 - \sqrt[3]{(1-\sqrt{2})^3} + 0,75 = (1,5-\sqrt{2}-1+\sqrt{2})^2 + 0,75 = 0,5^2 + 0,75 = 1;$$

$$\begin{aligned} \text{г) } \frac{2\sqrt{6}-\sqrt{20}}{2\sqrt{5}+\sqrt{24}} \cdot (11+2\sqrt{30}) &= \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{5})^2}{6-5} \cdot (11+2\sqrt{30}) = \\ &= (6-2\sqrt{30}+5)(11+2\sqrt{30}) = 121-120=1. \end{aligned}$$

48.

$$\begin{aligned} \text{а) } \left(\frac{a+2}{\sqrt{2a}} - \frac{a}{\sqrt{2a}+2} + \frac{2}{a-\sqrt{2a}} \right) \cdot \frac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{a+2} &= \left(\frac{a+2}{\sqrt{2a}} - \frac{a}{\sqrt{2}(\sqrt{a}+\sqrt{2})} + \frac{2}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt{2})} \right) \times \\ \times \frac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{a+2} &= \frac{(a+2)(a-2) - a(\sqrt{a}-\sqrt{2}) \cdot \sqrt{a} + 2 \cdot \sqrt{2}(\sqrt{a}+\sqrt{2}) \cdot \sqrt{a}-\sqrt{2}}{\sqrt{2a}(a-2)} = \\ &= \frac{a^2-4-a^2+a\sqrt{2a}+2\sqrt{2a}+4}{\sqrt{2a}(a-2)} \cdot \frac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{a+2} = \frac{a\sqrt{2a}+2\sqrt{2a}}{\sqrt{2a}(a-2)} \cdot \frac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{a+2} = \\ &= \frac{a+2}{a-2} \cdot \frac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{a+2} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{a-2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \sqrt{ab} \right) \left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b} \right)^2 &= (a-\sqrt{ab}+b-\sqrt{ab}) \left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b} \right)^2 = \\ &= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \cdot (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{(a-b)^2} = \frac{(a-b)^2}{(a-b)^2} = 1; \end{aligned}$$

$$\text{B)} \quad \frac{\sqrt{x}+1}{1+\sqrt{x}+x} : \frac{1}{x^2-\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x}+1)\sqrt{x}(x\sqrt{x}-1)}{1+\sqrt{x}+x} = \sqrt{x}(x-1);$$

$$\begin{aligned} \text{r)} \quad & \left(\frac{\sqrt{c}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{c}} \right)^2 \left(\frac{\sqrt{c}-1}{\sqrt{c}+1} - \frac{\sqrt{c}+1}{\sqrt{c}-1} \right) = \left(\frac{c-1}{2\sqrt{c}} \right)^2 \left(\frac{(\sqrt{c}-1)^2 - (\sqrt{c}+1)^2}{c-1} \right) = \\ & = \frac{(c-1)^2 (2\sqrt{c} \cdot (-2))^2}{4c(c-1)^2} = \frac{16c}{4c} = 4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{49. a)} \quad & \left(\sqrt{k} - \frac{\sqrt[4]{k^3}+1}{\sqrt[4]{k}+1} \right)^{-1} - \frac{\sqrt[4]{k^3}+\sqrt{k}}{\sqrt{k}-1} = (\sqrt{k}-\sqrt{k}+\sqrt[4]{k}-1)^{-1} - \frac{\sqrt[4]{k}(\sqrt[4]{k^2}+\sqrt[4]{k})}{\sqrt{k}-1} = \\ & = \frac{1}{\sqrt[4]{k}-1} - \frac{\sqrt{k}(\sqrt[4]{k}+1)}{\sqrt{k}-1} = \frac{1-\sqrt{k}}{\sqrt[4]{k}-1} = \frac{\sqrt{k}-1}{\sqrt[4]{k}-1} = -\sqrt[4]{k}-1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & \left(\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 - (2\sqrt{b})^2}{a-b} - \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \right) : \frac{32b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \\ & = \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b}-2\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b}+2\sqrt{b}) - (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{a-b} : \frac{32b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \\ & = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+3\sqrt{b}-\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(a-b) \cdot 32b\sqrt{b}} = \frac{4\sqrt{b}}{32b\sqrt{b}} = \frac{1}{8b}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{B)} \quad & \left(\frac{\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[4]{y^3}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} - (\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}) \right) \left(4\sqrt{\frac{x}{y}}+1 \right) = \left(\frac{(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y})(\sqrt{x}+\sqrt[4]{xy}+\sqrt{y})}{(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y})(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y})} - (\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}) \right) \times \\ & \times \frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}{\sqrt[4]{y}} = \frac{\sqrt{x}+\sqrt[4]{xy}+\sqrt{y}-\sqrt{x}-2\sqrt[4]{xy}-\sqrt{y}}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}} \cdot \frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}{\sqrt[4]{y}} = \frac{-\sqrt[4]{xy}(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y})}{(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y})\sqrt[4]{y}} = -\sqrt[4]{x}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{r)} \quad & \frac{\sqrt{a^3}+\sqrt{ab^2}-\sqrt{a^2b}-\sqrt{b^3}}{\sqrt[4]{b^5}+\sqrt[4]{a^4b}-\sqrt[4]{ab^4}-\sqrt[4]{a^5}} = \frac{\sqrt{a}(a+b)-\sqrt{b}(a+b)}{\sqrt[4]{b}(a+b)-\sqrt[4]{a}(a+b)} = \\ & = \frac{(a+b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(a+b)(\sqrt[4]{b}-\sqrt[4]{a})} = \frac{(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}} = -(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{50. a)} \quad & \frac{x-1}{\frac{1}{x+x^2+1}} : \frac{x^{0,5}+1}{x^{1,5}-1} + \frac{2}{x^{-0,5}} = \frac{(x^{0,5}-1)(x^{0,5}+1)(x^{1,5}+1)}{(x+x^{0,5}+1)(x^{0,5}+1)} + 2x^{0,5} = \\ & = \frac{(x^{0,5}-1)(x^{0,5}-1)}{1} + 2x^{0,5} = (x^{0,5}-1)^2 + 2x^{0,5} = x+1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
6) \quad & \left(\frac{\frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{b^2} - \frac{ab}{\frac{1}{a+a^2b^2}}}{\frac{1}{a-b}} : \frac{(ab)^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{2}}}{a-b} = \left(\frac{\frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{b^2} - \frac{ab}{\frac{1}{a^2(a^2+b^2)}}}{\frac{1}{a-b}} : \frac{b^{\frac{1}{4}}(a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{2}})}{a-b} = \right. \\
& = \frac{(\frac{1}{a^2b^2}(a^2+b^2) - a^2b)(a-b)}{\frac{1}{(a^2+b^2)b^4}(a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{2}})} = \frac{\frac{1}{a^2b^2}(a^2+b^2 - b^2)(a^2 - b^2)(a^2 + b^2)}{\frac{1}{(a^2+b^2)b^4}(a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{2}})} = \\
& = \frac{\frac{1}{a^2b^2} \cdot a^2(a^2 - b^2)}{\frac{1}{a^4 - b^4}} = \frac{ab^2(a^4 + b^4)}{1} = ab^2(a^4 + b^4);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b) \quad & \left(\frac{2x + x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{3x} \right)^{-1} \cdot \left(\frac{\frac{3}{x^2} - \frac{3}{y^2}}{\frac{1}{x-x^2y^2}} - \frac{x-y}{x^2+y^2} \right) = \\
& = \frac{3x}{x^{\frac{1}{2}}(2x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}})} \cdot \left(\frac{x + x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} + y}{x^2} - \frac{x^2 - y^2}{1} \right) = \frac{3x}{x^{\frac{1}{2}}(2x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}})} \times \\
& \times \frac{x + x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} + y - x + x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{x^2} = \frac{3x}{x^{\frac{1}{2}}(2x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}})} \cdot \frac{y^{\frac{1}{2}}(2x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}})}{x^2} = 3y^{\frac{1}{2}};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r) \quad & \left(\frac{1-c^{-2}}{c^2-c} \cdot \frac{1}{2} - \frac{2c^{\frac{1}{2}}}{c^2} + \frac{c^{-2}-c}{c^2-c} \cdot \frac{1}{2} \right) \cdot \left(1 + \frac{2}{c^2} \right)^{-2} = \left(\frac{1-\frac{1}{c^2}}{\sqrt{c}-\frac{1}{\sqrt{c}}} - \frac{2\sqrt{c}}{c^2} + \frac{c^{\frac{1}{2}-c}}{\sqrt{c}-\frac{1}{\sqrt{c}}} \right) \times \\
& \times \left(\frac{c^2+2}{c^2} \right)^{-2} = \left(\frac{(c^2-1)\sqrt{c}}{c^2(c-1)} - \frac{2\sqrt{c}}{c^2} + \frac{(1-c^3)\sqrt{c}}{c^2(c-1)} \right) \cdot \left(\frac{c^2}{c^2+2} \right)^2 = \\
& = \frac{\sqrt{c}}{c^2} (c+1-2-(1+c+c^2)) \cdot \frac{c^4}{(c^2+2)^2} = \frac{c^2\sqrt{c}}{c^2+2}.
\end{aligned}$$

$$51. a) \quad \frac{\frac{7}{a^{\frac{2}{3}}} - 2a^{\frac{5}{3}}b^{\frac{2}{3}} + ab^{\frac{4}{3}}}{\frac{5}{a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}} - ab^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{2}{3}}b}} \cdot a^{-\frac{1}{3}} = \frac{a(a^{\frac{4}{3}} - 2a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{4}{3}})}{a^{\frac{1}{3}}((a^{\frac{2}{3}} - ab^{\frac{2}{3}}) - (a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}}b))} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{a(a^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{2}{3}})^2}{\frac{1}{a^3}(a^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{2}{3}})(a - a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}})} = \frac{a(a^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{2}{3}})}{\frac{1}{a}(a^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{2}{3}})} = a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}; \\
\text{б)} &\left(\frac{2(x^{\frac{1}{4}} - y^{\frac{1}{4}})}{x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{4}} - x^{\frac{1}{4}} y^{\frac{1}{2}}} - x - y \right) : \frac{y - x}{x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{4}} - x^{\frac{1}{4}} y^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{2(x^{\frac{1}{4}} - y^{\frac{1}{4}})x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{1}{4}} - x^{\frac{1}{4}}} - x - y \right) \times \\
&\times \frac{y^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}}{(y - x)x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}} = \frac{(2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} - x - y)}{(y^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}})x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}} = -\frac{(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}})}{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}} = -y^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}; \\
\text{в)} &\frac{c-1}{c^4+c^2} \cdot \frac{c^2+c^4}{c^2+1} \cdot c^{\frac{1}{4}}+1 = \frac{c-1}{c^2(c^4+1)} \cdot \frac{c^4(c^4+1)}{c^2+1} \cdot c^{\frac{1}{4}}+1 = c^{\frac{1}{2}}-1+1 = c^{\frac{1}{2}}; \\
\text{г)} &\frac{3(ab)^2-3b}{a-b} + \frac{(a^2-b^2)^3+2a^2+b^2}{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}} = \frac{3b^2(a^2-b^2)}{(a^2-b^2)(a^2+b^2)} + \\
&+ \frac{a^{\frac{3}{2}}-3ab^{\frac{1}{2}}+3a^{\frac{1}{2}}b-b^{\frac{3}{2}}+2a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}} = \\
&= \frac{3b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}} + 3a^{\frac{1}{2}} \frac{a-a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}} = \frac{3b^{\frac{1}{2}}+3a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}} = 3.
\end{aligned}$$

6. Преобразования тригонометрических выражений

$$\begin{aligned}
\text{52. а)} &\operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - \sin^2 \alpha - \frac{\sin^4 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \\
&= \frac{\sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha - \sin^4 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha (1 - \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha \cdot 0}{\cos^2 \alpha} = 0; \\
\text{б)} &\sqrt{\frac{\sin^2 \beta (\sin \beta + \cos \beta)}{\sin \beta} + \frac{\cos^2 \beta (\cos \beta + \sin \beta)}{\cos \beta}} = \\
&= \sqrt{\sin \beta (\sin \beta + \cos \beta) + \cos \beta (\cos \beta + \sin \beta)} = \sqrt{(\sin \beta + \cos \beta)^2} = |\sin \beta + \cos \beta|;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{в)} \quad & (3 \sin \alpha + 2 \cos \alpha)^2 + (2 \sin \alpha - 3 \cos \alpha)^2 = 9 \sin^2 \alpha + 12 \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \\ & + 4 \cos^2 \alpha + 4 \sin^2 \alpha - 12 \sin \alpha \cdot \cos \alpha + 9 \cos^2 \alpha = 9(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + \\ & + 4(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 13; \end{aligned}$$

$$\text{р)} \quad \frac{\cos \beta \operatorname{tg} \beta}{\sin^2 \beta} - \operatorname{ctg} \beta \cdot \cos \beta = \frac{1}{\sin \beta} - \frac{\cos^2 \beta}{\sin \beta} = \frac{1 - \cos^2 \beta}{\sin \beta} = \frac{\sin^2 \beta}{\sin \beta} = \sin \beta.$$

$$\mathbf{53. \text{ а) }} \quad 2 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}(\alpha - \pi) + \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = 2 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha = 2 \operatorname{tg} \alpha;$$

$$\text{б)} \quad \frac{\sin(-\alpha)}{\sin(\pi - \alpha)} - \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\operatorname{ctg} \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} = -1 - 1 + 1 = -1;$$

$$\begin{aligned} \text{в)} \quad & \frac{\operatorname{tg}(\pi - \beta) \cdot \cos(\pi - \beta) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)} = \\ & = \frac{(-\operatorname{tg} \beta) \cdot (-\cos \beta) \cdot \operatorname{ctg} \beta}{(-1) \cos \beta \cdot (-\operatorname{tg} \beta) - \operatorname{ctg} \beta} = \frac{\cos \beta}{\cos \beta} = 1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{г)} \quad & \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \sin \frac{3\pi}{2} \cdot \sin \frac{16\pi}{9} \cdot \cos \frac{13\pi}{18}}{\operatorname{ctg}(\pi - \alpha) \cdot \cos \frac{5\pi}{18} \cdot \sin \frac{11\pi}{9} \cdot \cos 2\pi} = \\ & = \frac{-\operatorname{ctg} \cdot (-\alpha) \cdot \sin\left(2\pi - \frac{2\pi}{9}\right) \cos\left(\pi - \frac{5\pi}{18}\right)}{-\operatorname{ctg} \alpha \cdot \cos \frac{5\pi}{18} \cdot \sin\left(\pi + \frac{2\pi}{9}\right) \cdot 1} = \frac{(-1)(-1) \sin \frac{2\pi}{9} \left(-\cos \frac{5\pi}{18}\right)}{\cos \frac{5\pi}{18} \cdot \left(-\sin \frac{2\pi}{9}\right)} = 1. \end{aligned}$$

$$\mathbf{54. \text{ а) }} \quad \frac{\operatorname{tg}(\alpha + \beta) - \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \beta)} = \operatorname{tg} \beta;$$

$$\begin{aligned} & \frac{\operatorname{tg}(\alpha + \beta) - \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \beta)} = \\ & \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg}^2 \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} = \\ & = \frac{\operatorname{tg} \alpha (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} = \\ & = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg}^2 \beta}{\operatorname{tg} \alpha (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)} = \\ & = \frac{\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)}{\operatorname{tg} \alpha (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)} = \operatorname{tg} \beta. \end{aligned}$$

Таким образом, равенство истинное.

$$\text{б) } \frac{1 - \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha} = \operatorname{tg} \alpha ;$$

$$\frac{1 - \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha} = \frac{2\sin^2 \alpha + 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{2\cos^2 \alpha + 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Тождество доказано.

$$\text{в) } \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)} = \operatorname{ctg} \alpha ;$$

$$\frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta + \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta + \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta} = \frac{2\cos \alpha \cdot \cos \beta}{2\sin \alpha \cdot \cos \beta} = \operatorname{ctg} \alpha .$$

Тождество доказано.

$$\text{г) } \frac{\sin \alpha - \sin 3\alpha}{\cos \alpha - \cos 3\alpha} = -\operatorname{ctg} 2\alpha ;$$

$$\begin{aligned} \frac{\sin \alpha - \sin 3\alpha}{\cos \alpha - \cos 3\alpha} &= \frac{\sin \alpha - (\sin \alpha \cos 2\alpha + \cos \alpha \sin 2\alpha)}{\cos \alpha - (\cos \alpha \cos 2\alpha - \sin \alpha \sin 2\alpha)} = \\ &= \frac{\sin \alpha - (\sin \alpha (1 - 2\sin^2 \alpha) + \cos \alpha \cdot 2\sin \alpha \cos \alpha)}{\cos \alpha - (\cos \alpha (1 - 2\sin^2 \alpha) - \sin \alpha \cdot 2\sin \alpha \cos \alpha)} = \\ &= \frac{\sin \alpha - \sin \alpha + 2\sin^3 \alpha - 2\sin \alpha \cos^2 \alpha}{\cos \alpha - \cos \alpha + 2\cos \alpha \sin^2 \alpha + 2\sin^2 \alpha \cos \alpha} = \\ &= \frac{\sin \alpha (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)}{2\sin^2 \alpha \cos \alpha} = -\frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{2\sin \alpha \cos \alpha} = -\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = -\operatorname{ctg} 2\alpha . \end{aligned}$$

Мы доказали тождество.

$$\text{55. а) } \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos \alpha}} = \cos \frac{\alpha}{4} \text{ при } \pi < \alpha < 2\pi .$$

Если $\pi < \alpha < 2\pi$, то $\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < \pi$ и $\cos \frac{\alpha}{2} < 0$.

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos \alpha}} &= \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} \cdot 2\cos^2 \frac{\alpha}{2}}} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left|\cos \frac{\alpha}{2}\right|} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos \frac{\alpha}{2})} = \sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{4}} = \left|\cos \frac{\alpha}{4}\right| = \\ &= \cos \frac{\alpha}{4}, \quad \text{так как } \frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{4} < \frac{\pi}{2}, \quad \cos \frac{\alpha}{4} > 0, \quad \left|\cos \frac{\alpha}{4}\right| = \cos \frac{\alpha}{4}. \end{aligned}$$

Мы доказали тождество.

$$\text{б) } \sqrt{1 - \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\alpha}} = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) \text{ при } \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}.$$

Если $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, то $\sin \alpha < 0$, $|\sin \alpha| = -\sin \alpha$.

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \sqrt{\sin^2 \alpha}} &= \sqrt{1 + \sin \alpha} = \sqrt{\sin \frac{\pi}{2} + \sin \alpha} = \sqrt{2 \sin \frac{\frac{\pi}{2} + \alpha}{2} \cdot \cos \frac{\frac{\pi}{2} - \alpha}{2}} = \\ &= \sqrt{2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)} = \sqrt{2 \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)} = \\ &= \sqrt{2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)} = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right), \\ \frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{4} < \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} < -\frac{\pi}{4}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) > 0. \end{aligned}$$

Мы доказали тождество.

$$\text{в) } \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\alpha}} = -\cos \frac{\alpha}{2} \text{ при } \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi, \quad \frac{3\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < \pi.$$

Значит,

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\alpha}} &= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\cos 2\alpha}} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \alpha} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} \cdot (1 + \cos \alpha)} = \sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} = -\cos \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Мы доказали тождество.

$$\text{г) } \sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \alpha}} = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) \text{ при } \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi, \quad \frac{3\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < \pi.$$

Значит,

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \alpha}} &= \sqrt{1 + \sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}} = \sqrt{1 + \sin \frac{\alpha}{2}} = \sqrt{\sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\alpha}{2}} = \\ &= \sqrt{2 \sin \frac{\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}}{2} \cdot \cos \frac{\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}}{2}} = \sqrt{2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4}\right)\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4}\right)} = \\ &= \sqrt{2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4}\right)} = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4}\right). \end{aligned}$$

Если $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, то $-\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4} < -\frac{\pi}{8}$, $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4}\right) > 0$.

Тождество доказано.

$$56. \text{ а) } \cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{5\pi}{7} = \cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} \cos \left(\pi - \frac{2\pi}{7} \right) = -\cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7};$$

$$-\cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cdot \sin \frac{\pi}{7} = \frac{1}{8} \sin \frac{\pi}{7};$$

преобразуем левую часть равенства:

$$-\frac{1}{2} \cdot 2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} = -\frac{1}{2} \cdot 2 \sin \frac{2\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} =$$

$$= -\frac{1}{4} \cdot 2 \sin \frac{2\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} = -\frac{1}{4} \sin \frac{4\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} = -\frac{1}{8} \cdot \sin \frac{8\pi}{7} =$$

$$= -\frac{1}{8} \cdot \sin \left(\pi + \frac{\pi}{7} \right) = \frac{1}{8} \cdot \sin \frac{\pi}{7};$$

полученное выражение равно правой части, исходное равенство верно.

$$\text{б) } \frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} - 4 \sin 20^\circ \cdot \sin 50^\circ = \sin 20^\circ \left(\frac{1}{\cos 20^\circ} - 4 \sin 50^\circ \right) =$$

$$= \sin 20^\circ \left(\frac{1 - 2(\sin 30^\circ + \sin 70^\circ)}{\cos 20^\circ} \right) =$$

$$= \sin 20^\circ \left(\frac{1 - 1 - 2 \sin 70^\circ}{\cos 20^\circ} \right) = -2 \sin 20^\circ \left(\frac{\sin(90^\circ - 20^\circ)}{\cos 20^\circ} \right) =$$

$$= -2 \sin 20^\circ \cdot \left(\frac{\cos 20^\circ}{\cos 20^\circ} \right) = -2 \sin 20^\circ. \quad \text{Равенство верно.}$$

$$\text{в) } \frac{1}{\sin 10^\circ} - 4 \sin 70^\circ = \frac{1 - 4 \sin 10^\circ \sin 70^\circ}{\sin 10^\circ} = \frac{1 + 2(\cos 80^\circ - \cos 60^\circ)}{\sin 10^\circ} =$$

$$= \frac{1 + 2 \cos 80^\circ - 2 \cdot \frac{1}{2}}{\sin 10^\circ} = 2 \frac{\cos(90^\circ - 10^\circ)}{\sin 10^\circ} = 2 \frac{\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ} = 2.$$

Равенство справедливо.

$$\text{г) } \cos 20^\circ + 2 \sin^2 55^\circ - \sqrt{2} \sin 65^\circ = \cos 20^\circ + 1 - \cos 110^\circ -$$

$$- 2 \sin 45^\circ \sin 65^\circ = \cos 20^\circ + 1 - \cos 110^\circ + \cos 110^\circ - \cos 20^\circ = 1.$$

Равенство справедливо.

57. а) Вычтем из левой части правую.

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x - 2 = \operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} - 2 = \frac{\operatorname{tg}^2 x + 1 - 2\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x} = \frac{(\operatorname{tg} x - 1)^2}{\operatorname{tg} x} \geq 0,$$

так как $(\operatorname{tg} x - 1)^2 \geq 0$; $\operatorname{tg} x > 0$ при всех $x \in (0; \frac{\pi}{2})$.

Неравенство верно.

б) Преобразуем дробь в левой части неравенства, учитывая, что

$$\begin{aligned} \frac{5\pi}{12} - \frac{\alpha}{4} &= \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{12} + \frac{\alpha}{4}\right) : \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\alpha}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{12} + \frac{\alpha}{4}\right)\right)} = \\ &= \frac{2\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\alpha}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\alpha}{4}\right)} = \frac{2\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{4\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\alpha}{2}\right)} = \\ &= 4\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\alpha}{2}\right) = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \frac{\alpha}{2} - 4 \cdot \sin \frac{\alpha}{2} = \\ &= 2\sqrt{3} \cos \frac{\alpha}{2} - 2\sin \frac{\alpha}{2}. \text{ Теперь равенство принимает вид} \end{aligned}$$

$$2\sqrt{3} \cos \frac{\alpha}{2} - 2\sin \frac{\alpha}{2} + 2\sin \frac{\alpha}{2} \leq 2\sqrt{3} \quad \text{или} \quad 2\sqrt{3} \cos \frac{\alpha}{2} \leq 2\sqrt{3},$$

что верно при любых α .

в) Рассмотрим левую часть неравенства и перемножим первую скобку на четвертую, а вторую на третью:

$$\begin{aligned} &(1 + \sin \varphi + \cos \varphi)(\sin \varphi + \cos \varphi - 1)(1 + (\cos \varphi - \sin \varphi)) \times \\ &\times (1 - (\cos \varphi - \sin \varphi)) = ((\sin \varphi + \cos \varphi)^2 - 1)(1 - (\cos \varphi - \sin \varphi)^2) = \\ &= (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi + 2\sin \varphi \cos \varphi - 1) \cdot (1 - \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi + 2\sin \varphi \cos \varphi) = \\ &= 2\sin \varphi \cos \varphi \cdot 2\sin \varphi \cos \varphi = \sin^2 2\varphi \leq 1. \end{aligned}$$

Неравенство верно при всех φ .

г) Преобразуем левую часть неравенства:

$$2\sin 4\alpha \sin 2\alpha + \cos 6\alpha = \cos 2\alpha - \cos 6\alpha + \cos 6\alpha = \cos 2\alpha \geq -1.$$

Неравенство верно при любых α .

58. а) $\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha$, если $\sin 2\alpha = \frac{2}{3}$. $\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha = \cos^4 \alpha + 2\sin^2 \alpha \times$

$$\times \cos^2 \alpha + \sin^4 \alpha - 2\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)^2 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha;$$

если $\sin 2\alpha = \frac{2}{3}$, то $1 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$.

б) $\frac{1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin \alpha}$, если $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = m$.

$$\begin{aligned} \frac{1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin \alpha} &= \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} + 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{(\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2})^2} = \\ &= \frac{\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} - \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}}{\frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} + \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}} = \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}; \end{aligned}$$

если $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = m$, то $\frac{1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - m}{1 + m}$.

в) Поскольку $\sin \alpha \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$, то $\frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{2}$, $2 \cos^2 \alpha + \cos \alpha - 2 = 0$,

откуда $\cos \alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}$, но $\frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4} < -1$, значит $\cos \alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}$.

г) Поскольку $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$, то $-\sqrt{2} = \frac{1 - \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha}$,

$$-\sqrt{2} \sin \alpha - 1 = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}, \quad 1 + 2\sqrt{2} \sin^2 \alpha + 2 \sin^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha,$$

$$3 \sin^2 \alpha + 2\sqrt{2} \sin \alpha = 0, \quad (3 \sin \alpha + 2\sqrt{2}) \cdot \sin \alpha = 0, \quad \text{но } \sin \alpha \neq 0,$$

так что $\sin \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Тогда $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 1 - 2 \cdot \frac{8}{9} = -\frac{7}{9}$;

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos \alpha) = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}) = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - \frac{8}{9}}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3},$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \text{и так как } \frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < \frac{3\pi}{2}, \quad \text{то } \cos \frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

59. а) $\lg \operatorname{tg} 1^\circ + \lg \operatorname{tg} 2^\circ + \dots + \lg \operatorname{tg} 89^\circ \operatorname{tg} 1^\circ = \operatorname{tg} 89^\circ$,
 поскольку $\operatorname{tg} 1^\circ = \operatorname{tg}(90^\circ - 89^\circ) = \operatorname{ctg} 89^\circ$, $\operatorname{tg} 2^\circ = \operatorname{ctg} 88^\circ$.
 $\lg \operatorname{tg} 1^\circ + \lg \operatorname{tg} 2^\circ + \dots + \lg \operatorname{tg} 89^\circ = \lg (\operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 2^\circ \dots \operatorname{tg} 89^\circ) =$
 $= \lg (\operatorname{ctg} 89^\circ \cdot \operatorname{ctg} 88^\circ \cdot \dots \cdot \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \dots \cdot \operatorname{tg} 88^\circ \cdot \operatorname{tg} 89^\circ) = \lg 1 = 0$.
 б) $\lg \operatorname{tg} 1^\circ \cdot \lg \operatorname{tg} 2^\circ \cdot \dots \cdot \lg \operatorname{tg} 89^\circ = \lg \operatorname{tg} 1^\circ \cdot \lg \operatorname{tg} 2^\circ \cdot \dots \cdot \lg \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \dots \cdot \lg \operatorname{tg} 89^\circ = 0$.

60. а) $\lg \sin 32^\circ \cdot \lg \cos 7^\circ \cdot \lg \operatorname{tg} 40^\circ \cdot \lg \operatorname{ctg} 20^\circ$.
 Все эти числа отрицательны; $\operatorname{ctg} 20^\circ$ — больше 1, его логарифм по основанию 10 больше 0; следовательно, произведение трех отрицательных чисел и одного положительного числа число отрицательное, значит, $\lg \sin 32^\circ \cdot \lg \cos 7^\circ \cdot \lg \operatorname{tg} 40^\circ \cdot \lg \operatorname{ctg} 20^\circ < 0$.
 б) $\lg \operatorname{tg} 2^\circ + \lg \operatorname{tg} 4^\circ + \lg \operatorname{ctg} 2^\circ + \lg \operatorname{ctg} 4^\circ = \lg (\operatorname{tg} 2^\circ \cdot \operatorname{tg} 4^\circ \cdot \operatorname{ctg} 2^\circ \cdot \operatorname{ctg} 4^\circ) = \lg 1 = 0$.

61. Воспользуемся формулой $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$. Тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{y}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{z}{2} &= \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} + \frac{1 - \cos y}{1 + \cos y} + \frac{1 - \cos z}{1 + \cos z} = \frac{1 - \frac{a}{b+c}}{1 + \frac{a}{b+c}} + \\ &+ \frac{1 - \frac{a}{b+c}}{1 + \frac{a}{b+c}} + \frac{1 - \frac{a}{b+c}}{1 + \frac{a}{b+c}} = \frac{b+c-a}{a+b+c} + \frac{c+a-b}{a+b+c} + \frac{a+b-c}{a+b+c} = \\ &= \frac{b+c-a+c+a-b+a+b-c}{a+b+c} = \frac{a+b+c}{a+b+c} = 1. \end{aligned}$$

7. Преобразования выражений, содержащих степени и логарифмы

62. а) 3^{400} и 4^{300} ; $3^{400} = (3^4)^{100} = 81^{100}$, $4^{300} = (4^3)^{100} = 64^{100}$,
 поскольку $81 > 64$, то $81^{100} > 64^{100}$, а значит, $3^{400} > 4^{300}$;

б) $-\log_5 \frac{1}{5}$ и $7^{\log_3 1}$; $-\log_5 \frac{1}{5} = -\log_5 \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} = \log_5 5 = 1$,

$7^{\log_3 1} = 7^{\log_3 1} = 7^0 = 1$, следовательно, $-\log_5 \frac{1}{5} = 7^{\log_3 1}$;

- в) 5^{200} и 2^{500} ; $5^{200} = 25^{100}$, $2^{500} = 32^{100}$, так как
 $32 > 25$, то $25^{100} < 32^{100}$, значит, $5^{200} < 2^{500}$;

г) $\log_4 \sqrt{2}$ и $\log_3 \frac{1}{81}$; $\log_4 \sqrt{2} = \log_2 (\sqrt{2})^{\frac{1}{2}} = \log_2 2^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}$,

$\log_3 \frac{1}{81} = \log_3 (3)^{-4} = -4$; значит, $\log_4 \sqrt{2} > \log_3 \frac{1}{81}$.

63. а) $\log_3 2 + \log_3 7 = \log_3 (2 \cdot 7) = \log_3 14$; $\log_3 (2 + 7) = \log_3 9 = 2$;
 $y = \log_3 t$ – возрастает, поскольку $3 > 1$, значит, $\log_3 14 > \log_3 9$,
 поэтому, $\log_3 2 + \log_3 7 > \log_3 (2 + 7)$;

б) $\log_4 5 - \log_4 3 = \log_4 \frac{5}{3}$, $\log_4 (5 - 3) = \log_4 2$; $y = \log_4 t$ – возрастает,

так как $4 > 1$, значит, $\log_4 2 > \log_4 \frac{5}{3}$, значит, $\log_4 5 - \log_4 3 < \log_4 (5 - 3)$;

в) $3\log_7 2 = \log_7 8 > 0$, $\log_7 (3 - 2) = \log_7 1 = 0$, значит, $3\log_7 2 > \log_7 (3 - 2)$;

г) $\log_3 1,5 + \log_3 2 = \log_3 (1,5 \cdot 2) = \log_3 3 = 1$, $\log_3 1,5^2 = \log_3 2,25$, так
 как $y = \log_3 t$ – возрастает и $3 > 2,25$, то $\log_3 2,25 < \log_3 3$, поэтому,
 $\log_3 1,5 + \log_3 2 > \log_3 1,5^2$.

$$64. \text{ а) } 81^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \log_9 4} + 25^{\log_{125} 8} = 81^{\frac{1}{4}} : 81^{\log_9 \sqrt{4}} + 25^{\log_{125} 8} = \sqrt[4]{81} : (9^{\log_9 \sqrt{4}})^2 + \\ + (5^{\frac{1}{3} \log_5 8})^2 = 3 : 4 + (8^{\frac{1}{3}})^2 = \frac{3}{4} + \sqrt[3]{8^2} = \frac{3}{4} + 4 = 4\frac{3}{4};$$

$$\text{б) } 2^{4\log_4 a} - 5^{\frac{1}{2} \log_{\sqrt{5}} a} - a^0 = 2^{2\log_2 a} - 5^{\log_5 a} - 1 = 2^{\log_2 a^2} - 5^{\log_5 a} - 1 = \\ = a^2 - a - 1.$$

$$65. \text{ а) } 49^{1 - \log_7 2} + 5 = \frac{49}{(7^{\log_7 2})^2} + 5 = \frac{49}{4} + 5 = 12\frac{1}{4} + 5 = 17,25;$$

$$\text{б) } 36^{\frac{1}{2} \log_6 5} + 2^{-\log_2 10} = \frac{\sqrt{36}}{(6^{\log_6 5})^2} + \frac{1}{2^{\log_2 10}} = \frac{6}{25} + \frac{1}{10} = \frac{24 + 10}{100} = 0,34.$$

$$66. \text{ а) } \frac{\lg 8 + \lg 18}{2 \lg 2 + \lg 3} = \frac{\lg 144}{\lg 12} = \frac{\lg 12^2}{\lg 12} = \frac{2 \lg 12}{\lg 12} = 2;$$

$$\text{б) } 2\log_{0,3} 3 - 2\log_{0,3} 10 = \log_{0,3} 9 - \log_{0,3} 100 = \log_{0,3} \frac{9}{100} = \log_{0,3} (0,3)^2 = 2;$$

$$\text{в) } \frac{3 \lg 2 + 3 \lg 5}{\lg 13 - \lg 130} = \frac{\lg 8 + \lg 125}{\lg 0,1} = \frac{\lg 1000}{\lg 0,1} = \frac{3}{-1} = -3;$$

$$\text{г) } (2\log_{12} 2 + \log_{12} 3)(2\log_{12} 6 - \log_{12} 3) = \log_{12} 12 \cdot \log_{12} 12 = 1.$$

$$67. \text{ а) } 25b^3 \sqrt[4]{c^7} \text{ при } a = 5;$$

$$\log_5 25 + \log_5 b^3 + \log_5 \sqrt[4]{c^7} = 2 + 3 \log_5 b + \frac{7}{4} \log_5 c;$$

$$\text{б) } \frac{0,0016b^4}{c^{\frac{7}{4} \sqrt{c^2}}} \text{ при } a = 0,2, b > 0, c > 0;$$

$$\log_{0,2} 0,0016 + 4 \log_{0,2} b - \log_{0,2} c^{1\frac{2}{7}} = 4 + 4 \log_{0,2} b - 1\frac{2}{7} \log_{0,2} c.$$

$$68. a) \log_4 x = 2 \log_4 10 + \frac{3}{4} \log_4 81 - \frac{2}{3} \log_4 125;$$

$$x = \frac{10^2 \cdot \sqrt[4]{81^3}}{\sqrt[3]{125^2}} = \frac{100 \cdot 27}{25} = 108;$$

$$б) \log_{\frac{1}{3}} x = \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{3}} 16 - \log_{\frac{1}{3}} 8 + \log_{\frac{1}{3}} 28; \quad x = \frac{\sqrt{16} \cdot 28}{8} = 4.$$

$$69. a) \frac{7,832 \cdot \sqrt[4]{12,98}}{5,256^2} \approx \frac{7,832 \cdot 1,8981}{27,6256} \approx 0,5381;$$

$$б) \frac{102,3^2}{\sqrt[3]{92,14 \cdot 6,341}} \approx \frac{10465,3}{4,5101 \cdot 6,341} \approx 365,94.$$

$$70. \log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_{10} 9 = \\ = \frac{\lg 2}{\lg 3} \cdot \frac{\lg 3}{\lg 4} \cdot \frac{\lg 4}{\lg 5} \cdot \frac{\lg 5}{\lg 6} \cdot \frac{\lg 6}{\lg 7} \cdot \frac{\lg 7}{\lg 8} \cdot \frac{\lg 8}{\lg 9} \cdot \frac{\lg 9}{\lg 10} = \frac{\lg 2}{\lg 10} = \lg 2 \approx 0,3010.$$

$$71. \text{Поскольку } \sqrt{3} - 1 = \frac{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)}{\sqrt{3} + 1} = \frac{3 - 1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{2}{\sqrt{3} + 1},$$

$$\sqrt{6} + 2 = \frac{(\sqrt{6} + 2)(\sqrt{6} - 2)}{\sqrt{6} - 2} = \frac{6 - 4}{\sqrt{6} - 2} = \frac{2}{\sqrt{6} - 2}, \text{ то}$$

$$\log_2(\sqrt{3} - 1) + \log_2(\sqrt{6} + 2) = \log_2 \frac{2}{\sqrt{3} + 1} + \log_2 \frac{2}{\sqrt{6} - 2} = \\ = \log_2 2 - \log_2(\sqrt{3} + 1) + \log_2 2 - \log_2(\sqrt{6} - 2) = 2 - A.$$

§ 3. Функции

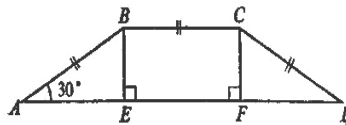
8. Рациональные функции

$$72. a) \text{ Пусть } AB = CB = DC = x,$$

$$\text{тогда } CF = BE = \frac{x}{2}, \quad AE = DF = \frac{x\sqrt{3}}{2}.$$

$$S = \frac{BC + AD}{2} \cdot BE;$$

$$S(x) = \frac{x + x + \frac{x\sqrt{3}}{2} \cdot 2}{2} \cdot \frac{x}{2} = \frac{(2x + x\sqrt{3})}{4}.$$



б) Пусть $BE = x$, тогда $AB = BC = CD = 2x = EF$, $AE = x\sqrt{3}$.

Периметр трапеции равен:

$$P(t) = 2x + 2x + 2x + 2x + 2\sqrt{3}x = 2x(4 + \sqrt{3}).$$

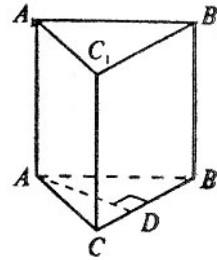
73.

а) Пусть $AB = x$, тогда $BC = AC = AA_1 = x$,

$AD = \frac{x\sqrt{3}}{2}$. Объём призмы равен:

$$V = S_{ABC} \cdot AA_1; S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AD.$$

$$V(x) = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2} \cdot x = \frac{x^3\sqrt{3}}{4}.$$



б) Если объём призмы v , то сторона основания $AB = \sqrt[3]{\frac{4v}{\sqrt{3}}}$

$$S_{бок} = P_{ABC} \cdot AA_1; P_{ABC} = 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{4v}{\sqrt{3}}}, AA_1 = AB = \sqrt[3]{\frac{4v}{\sqrt{3}}};$$

$$S_{бок}(v) = 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{4v}{\sqrt{3}}} \cdot \sqrt[3]{\frac{4v}{\sqrt{3}}} = 3 \sqrt[3]{\frac{16v^2}{3}}. \text{ Ответ: } S(v) = 3 \sqrt[3]{\frac{16v^2}{3}}.$$

74. 1) $x = A \sin \omega t + x_0$; 2) $v = x'(t) = A\omega \cos \omega t$.

75.

а) I – в В в 6 ч 30 мин, II – в А в 7 часов;

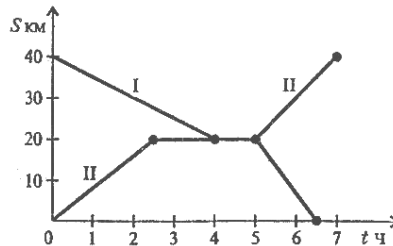
б) I турист – 4 ч + 1,5 = 5,5 ч, II турист – 2,5 + 2 = 4,5 ч;

в) I турист – 4 ч, II турист – в 2 ч 30 мин;

г) I турист – 1 час, II турист – 2,5 часа;

д) I турист до остановки двигался со скоростью $v = \frac{20}{4} = 5$ (км/ч),

после остановки $v = \frac{20}{1,5} = 13\frac{1}{3}$ (км/ч);



II турист до остановки $v = \frac{20}{2,5} = 8$ (км/ч), после остановки

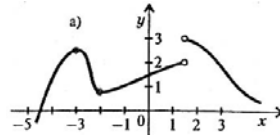
$$v = \frac{20}{2} = 10 \text{ (км/ч);}$$

е) Средняя скорость движения первого туриста $v = \frac{40}{5,5} = 7\frac{3}{11}$ (км/ч),

второго туриста $v = \frac{40}{4} = 8\frac{8}{9}$ (км/ч).

76.

а) 1) $(-\infty; -3] \cup [-2; 1,5)$



2) $[-3; -2] \cup (1,5; \infty)$;

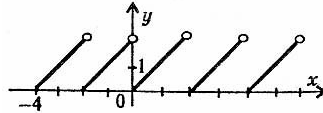
3) $x_{\max} = -3, y(-3) = 2,5, x_{\min} = -2, y(-2) = 0,5$;

4) $y_{\max} = 3,5$ при $x = 1,5, y_{\min} = 0,5$ при $x = -2$;

5) в точке $x = 1,5, y(1,5) = 3,5$; 6) на $(-\infty; 1,5)$ и на $(1,5; \infty)$;

7) ни четная, ни нечетная.

б) 1) функция возрастает в каждой точке непрерывности;



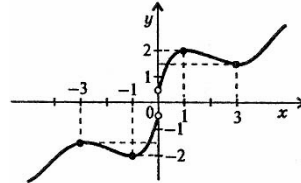
2) нет; 3) нет; 4) y_{\max} — нет, $y_{\min} = 0$, при $x = -2, 0, 2$;

5) в точках $-2; 0; 2; 4; 6; 8$; значения функции в них равны 0;

6) на $(-4; -2), (-2; 0), (2; 4), (4; 6), (6; 8)$;

7) ни четная, ни нечетная.

в) 1) возрастает на $(-\infty; -3] \cup [-1; 0) \cup (0; 1] \cup [3; \infty)$;



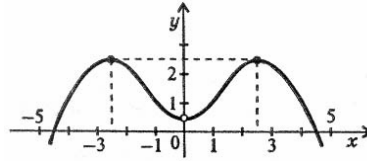
2) убывает на $[-3; -1] \cup (1; 3]$;

3) $x_{\max} = -3, y(-3) = -1,5, x_{\max} = 1, y(1) = 2,$

$x_{\min} = -1, y(-1) = -2, x_{\min} = 3, y(3) = 1,5$;

4) $y_{\max} = 2$ при $x = 1, y_{\min} = -2$ при $x = -1$;

- 5) в точке $x = 0$, значения функции нет в этой точке;
 б) непрерывна на $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$; 7) нечетная.
 г) 1) возрастает на $(-\infty; -2,5] \cup (0; 2,5]$;



- 2) убывает на $[-2,5; 0) \cup [2,5; \infty)$;
 3) $x_{\max} = -2,5$, $y(-2,5) = 2,5$, $x_{\min} = 0$, $y(0) = 0,5$;
 4) $y_{\max} = 2$ при $x = -2$ и $x = 2$, $y_{\min} = 0,5$ при $x = 0$;
 б) непрерывна при всех x ; 7) четная.

77. а) $D(y) : x^2 + 2x - 8 \neq 0$, $x \neq -4$, $x \neq 2$,

$D(y) : x \in (-\infty; -4) \cup (-4, 2) \cup (2; +\infty)$;

б) $x^4 - 1 \neq 0$, $(x^2 - 1)(x^2 + 1) \neq 0$, $x \neq 1$, $x \neq -1$,

$D(y) : x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$;

в) $x^4 - 9x^2 + 20 \neq 0$, $x \neq \sqrt{5}$, $x \neq -\sqrt{5}$, $x \neq 2$, $x \neq -2$,

$D(y) : x \in (-\infty; -\sqrt{5}) \cup (-\sqrt{5}; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; \sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}; \infty)$;

г) $3x^2 - 5x + 4 \neq 0$, $D < 0$, $D(y) : x \in (-\infty; \infty)$.

78. а) $x^3 - x \neq 0$, $x(x^2 - 1) \neq 0$, $x \neq 0$, $x \neq 1$, $x \neq -1$; промежутки непрерывности $(-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; \infty)$;

б) $x - 1 \neq 0$, $x \neq 1$; непрерывность на $(-\infty; 1) \cup (1; \infty)$;

в) $x \neq 0$. Функция непрерывна на $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$;

г) $3x^3 - 2x^2 + 5 = 0$, $(x + 1)(3x^2 - 5x + 5) = 0$,

$x = -1$, $3x^2 - 5x + 5 \neq 0$ – т.к. $D < 0$, то функция непрерывна на $(-\infty; -1) \cup (-1; \infty)$.

79.

а) $y(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x = -(x^3 - 3x) = -y(x)$ – нечетность доказана;

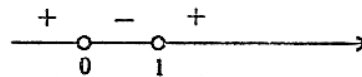
б) $y(-x) = \frac{5(-x)^3}{1 - (-x)^2} = \frac{-5x^3}{1 - x^2} = -\frac{5x^3}{1 - x^2} = -y(x)$ – нечетная;

в) $y(-x) = (-x)^4((-x)^2 + 2) = x^4(x^2 + 2) = y(x)$ – четная;

г) $y(-x) = \frac{|-x| + 2}{(-x)^2} = \frac{|x| + 2}{(-x)^2} = y(x)$ – четная.

80.

а) $\frac{x-1}{3x} > 0$, $(x-1)3x > 0$,



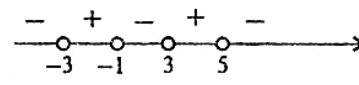
$$y(3) > 0, \quad y\left(\frac{1}{2}\right) < 0, \quad y(-2) > 0; \quad y > 0 \quad \text{при } x \in (-\infty; 0) \cup (1; \infty),$$

$$y < 0 \quad \text{при } x \in (0; 1);$$

б) $\frac{x^2 - 4x - 5}{9 - x^2} > 0, \quad \frac{(x-5)(x+1)}{(3-x)(3+x)} > 0, \quad y(8) < 0, y(4) > 0, y(-4) < 0,$

$$y(0) < 0, y(-2) > 0;$$

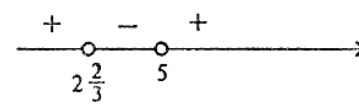
$$y > 0 \quad \text{при } x \in (-3; -1) \cup (3; 5),$$

$$y < 0 \quad \text{при } x \in (-\infty; -3) \cup (-1; 3) \cup (5; \infty);$$


в) $1 - \frac{2x-3}{5-x} > 0,$

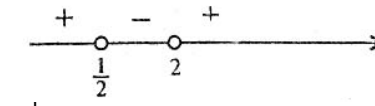
$$\frac{5-x-2x+3}{5-x} > 0,$$

$$\frac{8-3x}{5-x} > 0, \quad y(9) > 0, y(4) < 0, y(0) > 0; y > 0 \quad \text{при}$$

$$x \in (-\infty; 2\frac{2}{3}) \cup (5; \infty), \quad y < 0 \quad \text{при } x \in (2\frac{2}{3}; 5);$$


г) $y = 2x^2 - 5x + 2, \quad 2x^2 - 5x + 2 > 0,$

$$2(x - \frac{1}{2})(x - 2) > 0, \quad y > 0 \quad \text{при}$$

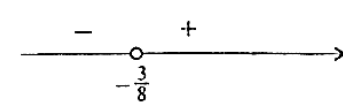
$$x \in (-\infty; \frac{1}{2}) \cup (2; \infty), \quad y < 0 \quad \text{при } x \in (\frac{1}{2}; 2).$$


81.

а) $y = 4x^2 + 3x - 1$. Производная функции: $y' = 8x + 3$. Критическая точка: $8x + 3 = 0, \quad 8x = -3, \quad x = -\frac{3}{8},$

$$y'(0) > 0, \quad y'(-1) < 0,$$

значит, $x = -\frac{3}{8}$ — точка минимума; функция возрастает на

$$[-\frac{3}{8}; \infty), \quad \text{убывает на } (-\infty; -\frac{3}{8}].$$


б) $y = 1 - \frac{2}{x}$. Производная функции: $y' = \frac{2}{x^2}$.

Критическая точка $x = 0$.

$$y'(2) > 0, \quad y'(-3) > 0;$$

функция возрастает на $D(y)$.



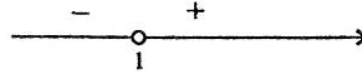
в) $y = (x-1)^4 - 2$. Производная: $y' = 4(x-1)^3$.

Критическая точка $x = 1$.

$y'(3) > 0, y'(0) < 0$;

$x = 1$ – точка минимума;

функция возрастает на $[1; \infty)$, убывает на $(-\infty; 1]$.



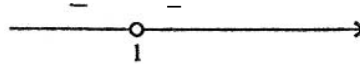
г) $y = \frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$

Производная:

$$\frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}.$$

Критическая точка $x = 1$. $y'(3) < 0, y'(0) < 0$;

Функция убывает на $D(y)$.



82.

а) $y = 3x - 5$;

$D(x) : x \in (-\infty; \infty)$; $E(y) : y \in (-\infty; \infty)$;

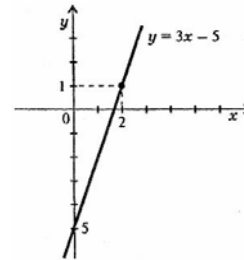
нули: $3x - 5 = 0, x = 1\frac{2}{3}$;

промежутки

знакопостоянства:

$y > 0$ при $x \in (1\frac{2}{3}; \infty)$, $y < 0$ при $x \in (-\infty; 1\frac{2}{3})$;

экстремумов нет, $y' = 3 = \text{const}$, функция возрастает на D .



б) $y = 2x^2 - 7x + 3$; $D(x) : x \in (-\infty; \infty)$;

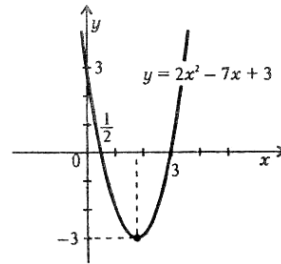
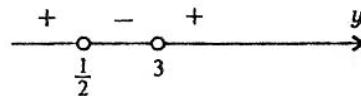
$x_0 = \frac{-8}{2a} = -\frac{7}{4}, y_0 = -3\frac{1}{8},$

$E(y) : y \in (-3\frac{1}{8}; \infty)$;

нули: $2x^2 - 7x + 3 = 0, x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 3$;

промежутки

знакопостоянства:



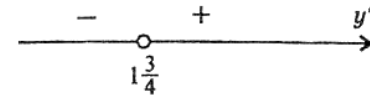
$$y > 0 \text{ при } x \in (-\infty; \frac{1}{2}) \cup (3; \infty), \quad y < 0 \text{ при } x \in (\frac{1}{2}; 3);$$

$$y' = 4x - 7, 4x - 7 = 0, x = 1\frac{3}{4} - \text{точка минимума,}$$

$$y = (1\frac{3}{4}) = -3\frac{1}{8};$$

$$y'(2) > 0, y'(0) < 0,$$

$$\text{возрастает на } [1\frac{3}{4}; \infty),$$



$$\text{убывает на } (-\infty; 1\frac{3}{4}].$$

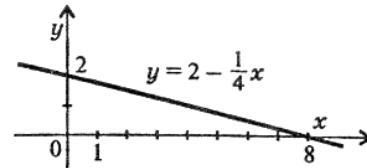
$$\text{в) } y = 2 - \frac{1}{4}x; \quad D(x): x \in (-\infty; \infty), \quad E(y): y \in (-\infty; \infty);$$

$$\text{нули: } 2 - \frac{1}{4}x = 0,$$

$$x = 8;$$

промежутки

знакопостоянства:



$$y > 0 \text{ при } x < 8, y < 0 \text{ при } x > 8; \quad y' = -\frac{1}{4} - \text{функция убывает на } D(y);$$

$$\text{г) } y = 12 - 4x - x^2;$$

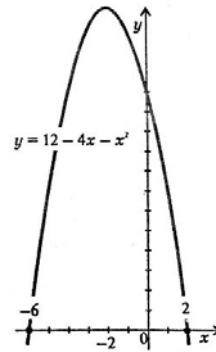
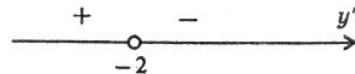
$$D(x): x \in (-\infty; \infty); \quad x_0 = -2; \quad y_0 = 16;$$

$$E(y): y \in (-\infty; 16); \quad \text{нули: } 12 - 4x - x^2 = 0,$$

$$x^2 + 4x - 12 = 0, \quad x_1 = -6,$$

$$x_2 = 2, y > 0 \text{ при } x \in (-6; 2),$$

$$y < 0 \text{ при } x \in (-\infty; -6) \cup (2; \infty);$$



$$y' = -4 - 2x, \quad -4 - 2x = 0,$$

$$x = -2, \quad y'(0) < 0, \quad y'(-6) > 0, \quad x = -2 - \text{точка максимума,}$$

$$y(-2) = 16; \text{ возрастает на } (-\infty; -2], \text{ убывает на } [-2; \infty).$$

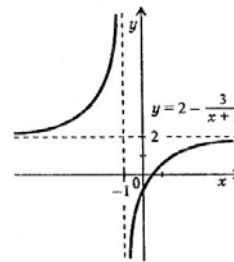
$$\text{83. а) } y = 2 - \frac{3}{x+1},$$

$$D(x): x \in (-\infty; -1) \cup (-1; \infty);$$

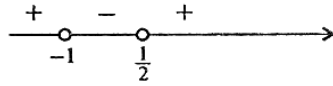
$$E(y): y \in (-\infty; 2) \cup (2; \infty);$$

$$\text{нули: } 2 - \frac{3}{x+1} = 0, \quad \frac{2x+2-3}{x+1} = 0,$$

$$2x - 1 = 0, \quad x = \frac{1}{2};$$



промежутки знакопостоянства:



$$\frac{2x-1}{x+1} > 0, (2x-1)(x+1) > 0, y(2) > 0,$$

$$y(0) < 0,$$

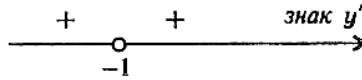
$$y(-2) > 0, y > 0 \text{ при } x \in (-\infty; -1) \cup (\frac{1}{2}; \infty), y < 0 \text{ при } x \in (-1; \frac{1}{2});$$

$$y' = \frac{3}{(x+1)^2},$$

$$y'(-2) > 0, y'(0) > 0,$$

критическая точка

$x = -1$; экстремумов нет; функция фозрастает на $(-\infty; -1) \cup (-1; \infty)$.



б) $y = (x-2)^3 - 1$; $D(x)$: $x \in (-\infty; \infty)$; $E(y)$: $y \in (-\infty; \infty)$; нули:

$$(x-2)^3 - 1 = 0, (x-2-1)(x^2 - 4x + 4 + x - 2 + 1) = 0,$$

$$(x-3)(x^2 - 3x + 3) = 0, x = 3 \text{ или } x^2 - 3x + 3 = 0 - \text{уравнение}$$

решений не имеет;

промежутки

знакопостоянства:

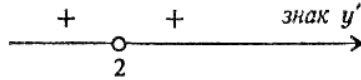
$$y(4) > 0, y(2) < 0, y > 0$$

$$\text{при } x \in (3; \infty), y < 0$$

$$\text{при } x \in (-\infty; 3);$$

$$y' = 3(x-2)^2,$$

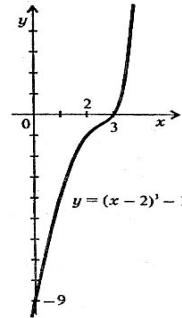
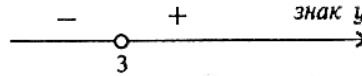
$$3(x-2)^2 = 0, x = 2,$$



$$y'(4) > 0, y'(0) > 0,$$

экстремумов нет;

Функция возрастает на $D(y)$.



$$\text{в) } y = \frac{x^4 + 1}{x^4} = 1 + \frac{1}{x^4};$$

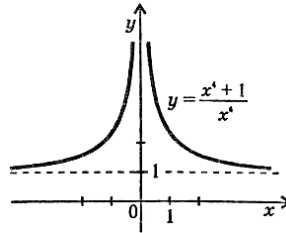
$$D(y): x \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty);$$

$$E(y): y \in (1; \infty); \text{ нулей нет;}$$

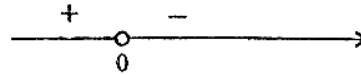
$$y > 0 \text{ при всех } x \in D(x);$$

$$x = 0 - \text{критическая точка;}$$

$$y'(1) < 0, y'(-1) > 0,$$



возрастает на $(-\infty; 0)$,
убывает на $(0; \infty)$.



г) $y = 4 - (x + 2)^4$;

$D(x): x \in (-\infty; \infty)$;

$E(y): y \in (-\infty; 4]$;

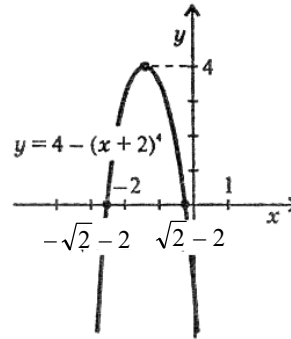
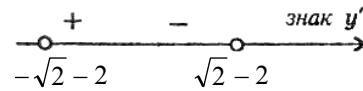
нули: $4 - (x + 2)^4 = 0$,

$(x + 2)^4 = 4$, $x_1 + 2 = \sqrt[4]{4}$,

$x_1 = \sqrt{2} - 2$,

$x_2 = -\sqrt{2} - 2$;

промежутки знакопостоянства:



$y(-2) > 0$, $y(3) < 0$,

$y(-10) < 0$;

$y' = -4(x + 2)^3$,

$-4(x + 2)^3 = 0$,

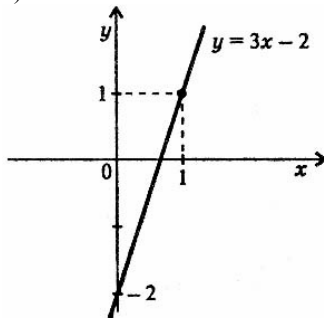
$(x + 2)^3 = 0$, $x = -2$,

$y'(0) < 0$, $y'(-3) > 0$, $x = -2$ — точка максимума, $y(-2) = 4$;
возрастает на $(-\infty; -2)$, убывает на $(-2; \infty)$.

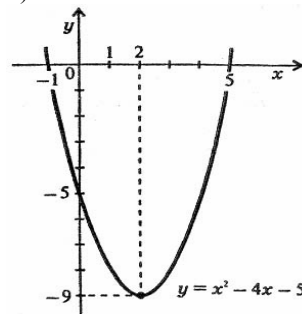


84.

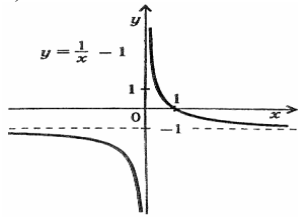
а)



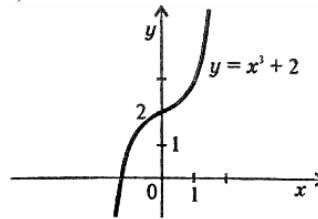
б)



в)

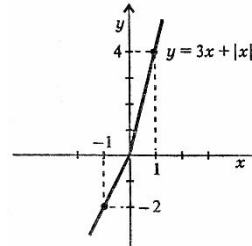


г)



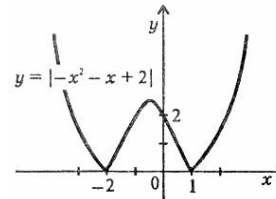
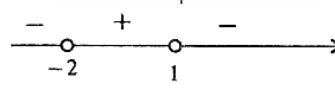
85.

а) При $x \geq 0$ $y = 3x + x$,
 $y = 4x$, при $x < 0$ имеем
 $y = 2x$;

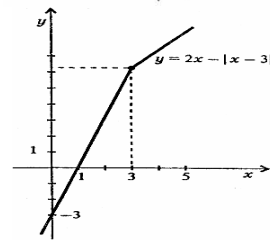


б) $-x^2 - x + 2 = 0$,
 $x^2 - x + 2 = 0$,
 $x_1 = -2$, $x_2 = 1$,

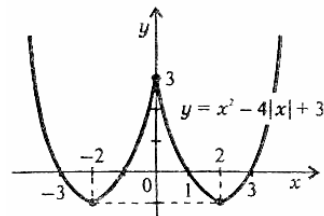
при $x \in [-2; 1]$
 $y = -x^2 - x + 2$,
при $x \in (-\infty; -2) \cup (1; \infty)$
 $y = x^2 + x - 2$;



в) при $x > 3$ имеем
 $y = 2x - x + 3$,
 $y = x + 3$,
при $x < 3$ имеем
 $y = 2x - (-x + 3)$,
 $y = 3x - 3$;



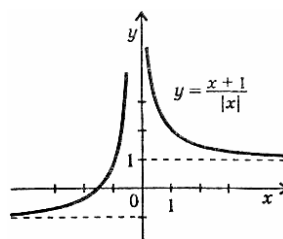
г) при $x > 0$ имеем
 $y = x^2 - 4x + 3$,
при $x < 0$ имеем
 $y = x^2 + 4x + 3$.



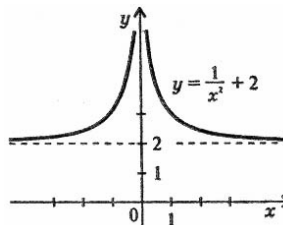
86.

а) При $x > 0$ имеем $y = \frac{x+1}{x}$,

при $x < 0$ имеем $y = -1 - \frac{1}{x}$;



б) $y = \frac{1}{x^2} + 2$;

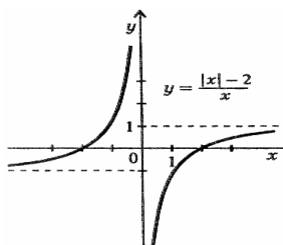


в) При $x > 0$ имеем

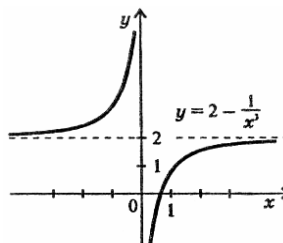
$$y = \frac{x-2}{x}, \quad y = 1 - \frac{2}{x},$$

при $x < 0$ имеем

$$y = \frac{-x-2}{x}, \quad y = -1 - \frac{2}{x};$$



г) $y = \frac{2x^3-1}{x^3}$,



87. а) $x^2 = x + 6$, $x^2 - x - 6 = 0$, $x_1 = 3$, $x_2 = -2$. Ответ: да.

б) $\frac{3}{x} = 4(x+1)$, $x \neq 0$, $3 = 4(x+1) \cdot x$, $3 = 4x^2 + 4x$,

$$4x^2 + 4x - 3 = 0, \quad D = 16 + 48 = 64, \quad x_1 = \frac{-4-8}{8} = -1\frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{1}{2}.$$

Ответ: да.

в) $x^4 = 2x^2 + 1, x^4 - 2x^2 - 1 = 0$.

$D = 4 + 4 = 8, x^2 = 1 + \sqrt{2}, x^2 = 1 - \sqrt{2}$ – корни есть,

$x^2 = 1 - \sqrt{2}$ – корней нет. Ответ: да.

г) $\frac{1}{x^2} = x^2 - 2, x \neq 0, 1 = x^4 - 2x^2, x^4 - 2x^2 - 1 = 0$. Пусть $x^2 = y$,

$D = 4 + 4 = 8, x^2 = 1 + \sqrt{2}, x^2 = 1 - \sqrt{2}$,

$x^2 = 1 + \sqrt{2}$ – корни есть, $x^2 = 1 - \sqrt{2}$ – корней нет. Ответ: да.

88. а) Функция $y = x^3 - 6x + 2$ определена на $[0; 1]$. $y(0) = 0 - 0 + 2 > 0$, $y(1) = 1 - 6 + 2 = -3 < 0$. Уравнение имеет корень на данном промежутке, т.к. функция непрерывна и она принимает значение 0.

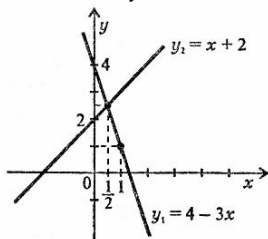
б) $y(1) = 1 - 3 + \frac{2}{9} = -1\frac{7}{9} < 0$, $y(2) = 16 - 12 + \frac{2}{9} = 4\frac{2}{9} > 0$, уравнение имеет корень на $[1; 2]$.

в) $y(1) = 1 + 3 - 5 = -1 < 0$ для $y(x) = x^5 + 3x - 5$ – непрерывной на I ;
 $y(2) = 32 + 6 - 5 = 33 > 0$, уравнение имеет корень на $[1; 2]$.

г) $y = 4 + 2x^3 - x^5$ – непрерывна на I ; $y(-1) = 4 - 2 + 1 = 3 > 0$,
 $y(2) = 4 + 16 - 32 < 0$, уравнение имеет корень на $[-1; 2]$.

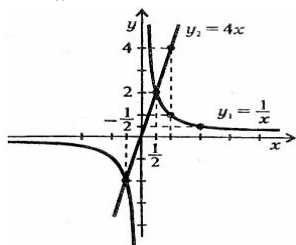
89.

а) $y_1 = 4 - 3x$ и $y_2 = x + 2$.



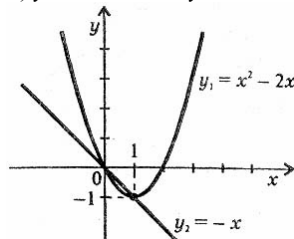
Ответ: $x \in [0, 5; \infty)$.

в) $y_1 = \frac{1}{x}$ и $y_2 = 4x$.



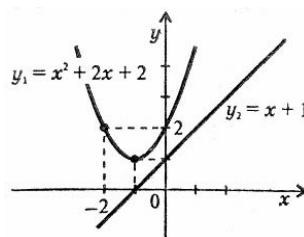
Ответ: $-0,5; 0,5$.

б) $y_1 = x^2 - 2x$ и $y_2 = -x$.



Ответ: 0; 1.

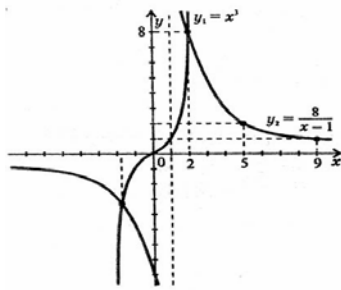
г) $y_1 = x^2 + 2x + 2$ и $y_2 = x + 1$.



Ответ: $x \in (-\infty; \infty)$.

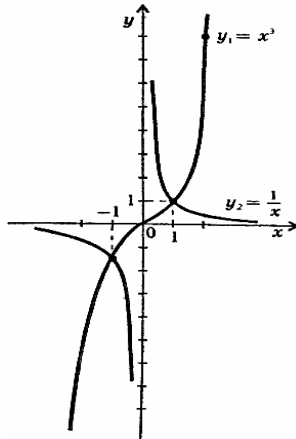
90.

а) $y_1 = x^3$ и $y_2 = \frac{8}{x-1}$.



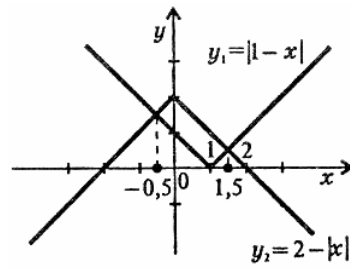
Ответ: 2 и приблизительно $-1,5$.

в) $y_1 = x^3$ и $y_2 = \frac{1}{x}$.



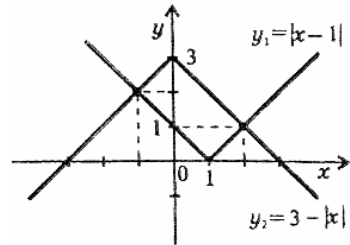
Ответ: -1 ; 1 .

б) $y_1 = |1-x|$ и $y_2 = 2-|x|$



Ответ: $-0,5$; $1,5$.

г) $y_1 = |x-1|$ и $y_2 = 3-|x|$



Ответ: -1 ; 2 .

91.

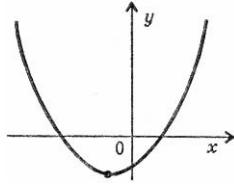
Из условия найдем a и b .

$$\begin{cases} 1 = 2a + b, \\ 10 = 5a + b, \end{cases} \quad 3a = 9, \quad a = 3, \quad b = -5$$

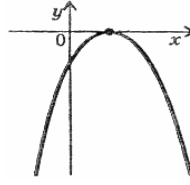
Ответ: $a = 3$, $b = -5$.

92.

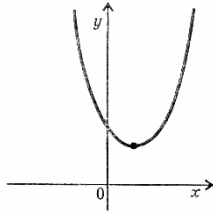
а)



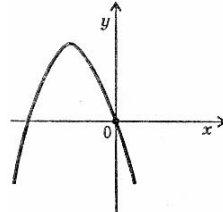
б)



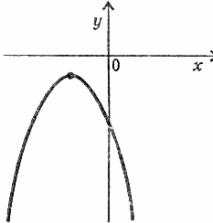
в)



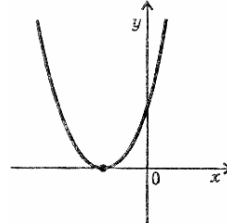
г)



д)



е)



а) $a > 0$, так как ветви параболы направлены вверх;

$b > 0$, так как абсцисса вершины параболы, $x_0 = -\frac{b}{2a} < 0$;

$c < 0$, так как ордината точки пересечения графика с осью Oy отрицательна;

$D > 0$, так как парабола пересекает ось Ox в двух точках;

б) аналогично а) имеем: $a < 0$, $b < 0$, $c < 0$, $D = 0$;

в) $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$, $D < 0$; г) $a < 0$, $b < 0$, $c = 0$, $D > 0$;

д) $a < 0$, $b < 0$, $c < 0$, $D < 0$; е) $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $D = 0$;

93. а) может, например: $y = x^2$, $y = c$;

б) может линейная функция, например $y = ax$; в) не может.

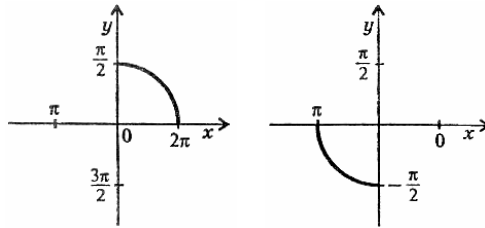
94. а) $y = \frac{1}{|x|} + \frac{x}{|x|}$; б) $y = (3) + (x^3 - x|x|)$;

в) $y = \frac{x^2}{x^4 - 1} + \frac{x^3 - x}{x^4 - 1}$; г) $y = (x^4 + 8) + (2x^5 - 3x)$.

95. а) $y(-x) = 5 \cdot (-x)^6 - 2(-x)^2 - 3 = 5x^6 - 2x^2 - 3 = y(x)$ — четная;
 б) $y(-x) = 4(-x)^5 - 2(-x)^3 + (-x) = -4x^5 + 2x^3 - x = -y(x)$ — нечетная;
 в) $y(-x) = \frac{3}{(-x)^2 + 1} = \frac{3}{x^2 + 1} = y(x)$ — четная;
 г) $y(-x) = -\frac{2}{(-x)^3} = \frac{2}{x^3} = -y(x)$ — нечетная.

9. Тригонометрические функции

96. а) $\cos^2 x \neq 0$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;
 б) $1 + 2\sin 2x \neq 0$, $\sin 2x \neq -\frac{1}{2}$, $2x \neq (-1)^k \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$,
 $x \neq (-1)^{k+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$;
 в) $\sqrt{3}\cos x - \frac{3}{2} \neq 0$, $\sqrt{3}\cos x \neq \frac{3}{2}$, $\cos x \neq \frac{3}{2\sqrt{3}}$, $\cos x \neq \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x \neq \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;
 г) $\sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} \neq 0$, $\sin \frac{x}{2} \neq 0$ или $\cos \frac{x}{2} \neq 0$,
 $\frac{x}{2} \neq \frac{\pi k}{2} + \pi n$, $k \in \mathbb{Z}$, $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.
 97. а) $\sin x \cdot \cos x \geq 0$, $\begin{cases} \sin x \geq 0, \\ \cos x \geq 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} \sin x \leq 0, \\ \cos x \leq 0. \end{cases}$



Ответ: $x \in [\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$.

- б) $\begin{cases} x \geq 0, \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n. \end{cases}$ n — целые положительные числа.

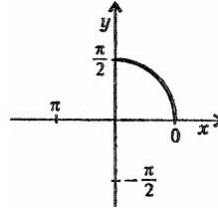
- в) $\sin^2 x - \cos^2 x \geq 0$, $\cos 2x \leq 0$, $\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq 2x \leq \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$,

$$n \in Z, \quad \frac{\pi}{4} + \pi n \leq x \leq \frac{3\pi}{4} + \pi n, \quad n \in Z.$$

$$\text{Ответ: } x \in [\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{3\pi}{4} + \pi n], \quad n \in Z.$$

$$\Gamma) \begin{cases} \sin x \geq 0, \\ \cos x \geq 0. \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } x \in [2\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n;], \quad n \in Z.$$



$$98. \text{ а) } E(y) : y \in [-2; 4];$$

$$\text{б) } E(y) : y \in (-2; 2);$$

$$\text{в) } E(y) : y \in [-1; 5];$$

$$\text{г) } E(y) : y \in [-1; 1].$$

$$99. \text{ а) } E(y) : y \in [\frac{1}{2}; +\infty);$$

$$\text{б) } y = \sqrt{1 - \cos 4x}, -1 \leq \cos 4x \leq 0, 0 < y \leq \sqrt{2}, \quad E(y) : y \in [0; \sqrt{2}];$$

$$\text{в) } y = \frac{3}{\cos x - 1} = \frac{-3}{1 - \cos x} = -\frac{3}{2 \sin^2 \frac{x}{2}}, \quad E(y) : y \in [-\infty; -\frac{3}{2}];$$

$$\text{г) } y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x}, \quad \left| a + \frac{1}{a} \right| \geq 2, \quad E(y) : y \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty).$$

$$100. \text{ а) } y > 0 \text{ при } -\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z,$$

$$-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in Z;$$

$$y < 0 \text{ при } \frac{\pi}{2} + 2\pi n < x + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z,$$

$$\frac{\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in Z.$$

$$\text{Ответ: } y > 0 \text{ при } x \in (-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n; \frac{\pi}{4} + 2\pi n), \quad n \in Z;$$

$$y < 0 \text{ при } x \in (\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{5\pi}{4} + 2\pi n), \quad n \in Z.$$

$$\text{б) } y < 0, \text{ если } 1 - \operatorname{tg} 3x < 0, \operatorname{tg} 3x > 1 \text{ при } \frac{\pi}{4} + \pi n < 3x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z,$$

$$\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3} < x < \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, \quad n \in Z; \quad y > 0, \text{ если } 1 - \operatorname{tg} 3x > 0,$$

$$\operatorname{tg} 3x < 1 \text{ при } \frac{\pi}{2} + \pi n < 3x < \frac{5\pi}{4} + \pi n, \quad n \in Z, \quad \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3} < x < \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}, \quad n \in Z.$$

$$\text{Ответ: } y < 0 \text{ при } x \in \left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}; \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3} \right), \quad n \in Z;$$

$$y > 0 \text{ при } x \in \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}; \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi n}{3} \right), \quad n \in Z.$$

$$\text{в) } y > 0, \text{ если } \sin \frac{x}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\frac{x}{2} \in \left(-\frac{5\pi}{4} + 2\pi n; \frac{\pi}{4} + 2\pi n \right), \quad x \in \left(-\frac{5\pi}{2} + 4\pi n; \frac{\pi}{2} + 4\pi n \right);$$

$$y < 0, \text{ если } \sin \frac{x}{2} > \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x \in \left(\frac{\pi}{2} + 4\pi k; \frac{3\pi}{2} + 4\pi k \right), \quad k, n \in Z.$$

$$\text{г) } y > 0, \text{ если } 1 + 2 \cos 2x > 0, \quad 2 \cos 2x > -1, \quad \cos 2x > -\frac{1}{2},$$

$$-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n < 2x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in Z, \quad -\frac{\pi}{3} + \pi n < x < \frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in Z;$$

$$y < 0, \text{ если } 1 + 2 \cos 2x < 0, \quad 2 \cos 2x < -1, \quad \cos 2x < -\frac{1}{2},$$

$$\frac{2\pi}{3} + 2\pi n < 2x < \frac{4\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in Z, \quad \frac{\pi}{3} + \pi n < x < \frac{2\pi}{3} + \pi n, \quad n \in Z.$$

$$\text{Ответ: } y > 0 \text{ при } x \in \left(-\frac{\pi}{3} + \pi n; \frac{\pi}{3} + \pi n \right), \quad n \in Z, \quad y < 0$$

$$\text{при } x \in \left(\frac{\pi}{3} + \pi n; \frac{2\pi}{3} + \pi n \right), \quad n \in Z.$$

$$\mathbf{101. а) } y(-x) = \operatorname{tg}(-3x) - \operatorname{ctg}\left(-\frac{x}{2}\right) = -\operatorname{tg} 3x + \operatorname{ctg} \frac{x}{2} = -y(x) - \text{нечетная};$$

$$\text{б) } y(-x) = \frac{\sin(-x) \cdot \cos^2(-x)}{(-x)} = \frac{-\sin x \cdot \cos^2 x}{-x} = y(x) - \text{четная};$$

$$\text{в) } y(-x) = \sin \left(\frac{(-x)^3 - (-x)}{(-x)^2 - 1} \right) = \sin \left(\frac{-x^3 + x}{x^2 - 1} \right) = \sin \left(-\frac{x^3 - x}{x^2 - 1} \right) =$$

$$= -\sin \frac{x^3 - x}{x^2 - 1} = -y(x) - \text{нечетная};$$

$$\text{г) } y(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} - \cos(-x) = \frac{-\sin x}{-x} - \cos x = \frac{\sin x}{x} - \cos x = y(x) - \text{четная}.$$

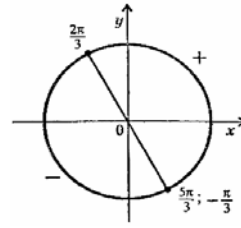
102. а) Периодическая с периодом $T = \frac{2\pi}{5}$; б) неперiodическая;
 в) периодическая, период $T = 2\pi$;
 г) $y = \sin^2 x + 2 \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x = 1 + \sin 2x$, периодическая, $T = \pi$.

103.

а) Производная функции: $\cos(x - \frac{\pi}{6}) = y'$

$$\cos(x - \frac{\pi}{6}) = 0, \quad x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$x = \frac{2\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$



$y' > 0$ на $(-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{2\pi}{3} + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$, значит,
 на этом промежутке функция возрастает;
 $y' < 0$ на $(\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \frac{5\pi}{3} + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$, значит, функция на этом промежутке убывает. В $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, производная меняет знак с «+» на «-», это точка максимума; в $x = \frac{5\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, производная меняет знак с «-» на «+», значит, это точка минимума.

Ответ: возрастает на $[-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{2\pi}{3} + 2\pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$;

убывает на $[\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \frac{5\pi}{3} + 2\pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$;

$$x_{\max} = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x_{\min} = \frac{5\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{б) } y' = \frac{-2(\sin x)}{(1 - \cos x)^2} = \frac{-\cos \frac{x}{2}}{2 \sin^3 \frac{x}{2}}, \quad y' = 0.$$

$$\cos \frac{x}{2} = 0, \quad x = \pi + 2\pi n, \quad x \neq 2\pi k, \quad k, n \in \mathbb{Z};$$

$$y' > 0 \quad x \in (\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n), \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$y' < 0 \quad x \in (2\pi n; \pi + 2\pi n), \quad n \in \mathbb{Z}. \text{ Таким образом,}$$

функция возрастает при $x \in [\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n]$, функция убывает при $x \in [2\pi k; \pi + 2\pi k)$, следовательно, в точке $x = \pi + 2\pi n$ производная меняет знак с «-» на «+», значит, это точка минимума, а точки максимума нет, т.к. $x \neq 2\pi k$.

$$\text{в) } y' = 0,5(-\sin(\frac{\pi}{3} - 2x)) \cdot (-2) = \sin(\frac{\pi}{3} - 2x) = -\sin(2x - \frac{\pi}{3}),$$

$$-\sin(2x - \frac{\pi}{3}) = 0,$$

$$2x - \frac{\pi}{3} = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$2x = \frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

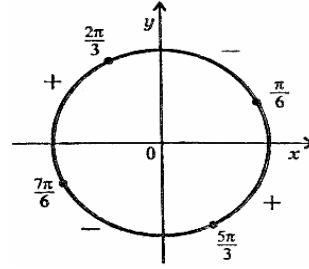
$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad y'(x) > 0 \text{ при}$$

$$(\frac{2\pi}{3} + \pi n; \frac{7\pi}{6} + \pi n), \quad n \in \mathbb{Z}, \text{ значит, при } x \in [\frac{2\pi}{3} + \pi n; \frac{7\pi}{6} + \pi n]$$

функция возрастает, $y' < 0$ на $(\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{2\pi}{3} + \pi n), \quad n \in \mathbb{Z},$ значит,

при $x \in [\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{2\pi}{3} + \pi n]$ функция убывает;

$$x_{\max} = \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad x_{\min} = \frac{5\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$



$$\text{г) } y' = \frac{1}{2\sqrt{1-\sin^2 x}} (-2 \sin x \cdot \cos x) = -\frac{\sin 2x}{2|\cos x|}.$$

Функция возрастает на $(\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi + \pi n), \quad n \in \mathbb{Z},$ убывает на

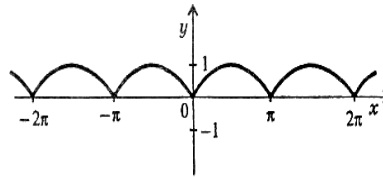
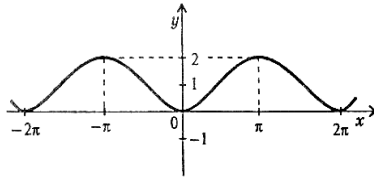
$[\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x_{\max} = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$ точек минимума нет.

104. а) так как $y = \cos^2 x - \sin^2 x + \sin^2 x, \quad y = \cos^2 x, \quad y_{\max} = 1, \quad y_{\min} = 0;$

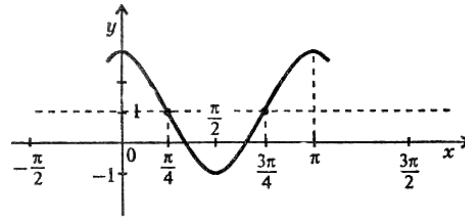
б) $y_{\min} = -3, \quad y_{\max} = 5;$ в) $y_{\min} = -\sqrt{2}, \quad y_{\max} = \sqrt{2};$

г) $y_{\min} = 1, \quad y_{\max}$ не существует.

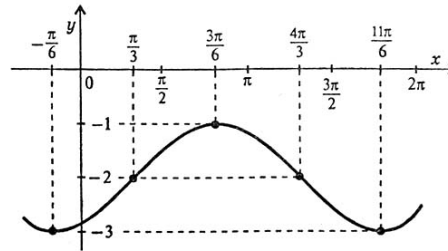
$$\text{105. а) } y = 2\sin^2 \frac{x}{2} = 1 - \cos x; \quad \text{б) } y = \sqrt{1 - \cos^2 x} = |\sin x|;$$



в) $y = 1 + 2 \cos 2x$;



г) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 2$.

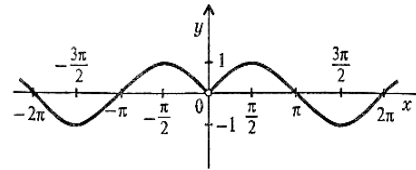


106.

а) $y = \frac{|x| \sin x}{x}$,

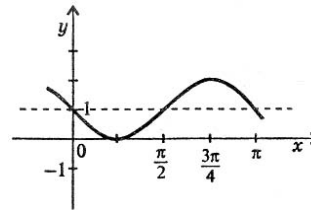
при $x > 0$ $y = \sin x$,

при $x < 0$ $y = -\sin x$;



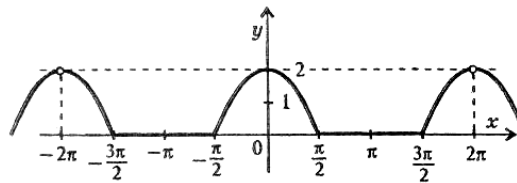
б)

$y = (\sin x - \cos x)^2 = 1 - \sin 2x$;

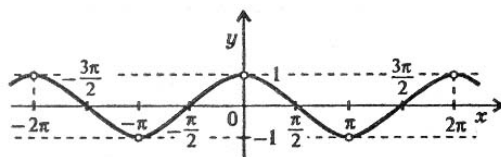


в) $y = \cos x + |\cos x|$, при $x \in (-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$,

$y = 2 \cos x$; при $x \in (\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$, $y = 0$;



$$г) y = \sin x \cdot \operatorname{ctg} x = \sin x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = \cos x, \quad x \neq \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$



107.

а) $y = \frac{1}{2} + \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$. 1) $D(y) : x \in (-\infty; \infty)$. 2) $E(y) : y \in \left[-\frac{1}{2}; 1\frac{1}{2}\right]$.

3) Нули: $\frac{1}{2} + \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 0, \quad \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2},$

$$x - \frac{\pi}{6} = (-1)^k \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

4) Промежутки знакопостоянства:

$$y > 0, \quad -\frac{\pi}{6} + 2\pi m < x - \frac{\pi}{6} < \frac{7\pi}{6} + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z},$$

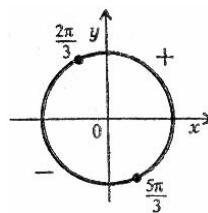
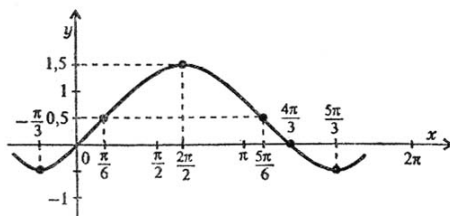
$$2\pi m < x < \frac{4\pi}{3} + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}; \quad y < 0, \quad -\frac{5\pi}{6} + 2\pi m < x - \frac{\pi}{6} < -\frac{\pi}{6} + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z},$$

$$-\frac{2\pi}{3} + 2\pi m < x < \frac{\pi}{6} + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

5) Функция ни четная, ни нечетная.

б) $y' = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right), \quad \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 0,$

$$x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$



$$x = -\frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad \text{возрастает на } \left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right], \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$\text{убывает на } \left[\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \frac{5\pi}{3} + 2\pi n\right], \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$x_{\max} = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x_{\min} = \frac{5\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

7) Периодичная с периодом 2π .

б) $y = \frac{1}{2} \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right).$

1) $D(y): \frac{x}{2} - \frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad \frac{x}{2} \neq \frac{5\pi}{6} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad x \neq \frac{5\pi}{3} + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z},$

2) $E(y): y \in (-\infty; \infty).$

3) Нули: $\frac{1}{2} \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = 0, \quad \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = 0, \quad \frac{x}{2} - \frac{\pi}{3} = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{3} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

4) Промежутки знакопостоянства:

$$y > 0, \quad x \in \left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \frac{5\pi}{3} + 2\pi n\right), \quad n \in \mathbb{Z},$$

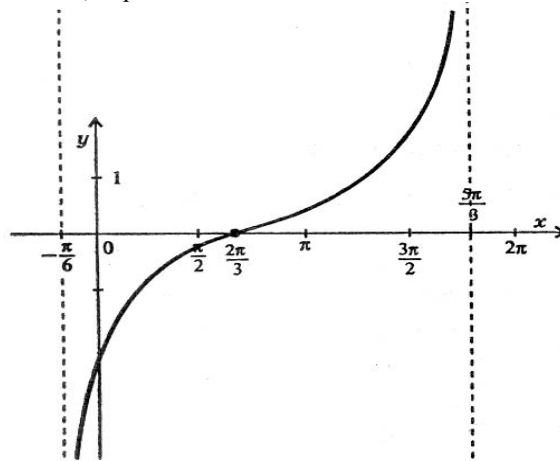
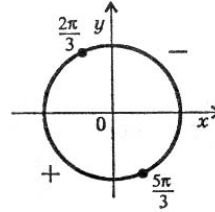
$$y < 0, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right), \quad n \in \mathbb{Z},$$

5) Функция ни четная, ни нечетная.

6) $y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4 \cos^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)} > 0$

при всех $x \in D(y)$, функция возрастает, экстремумов нет.

7) Периодичная, период 2π .



$$в) \quad y = 1 + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1 + \frac{1}{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

$$1) \quad D(y): x \in (-\infty; \infty).$$

$$2) \quad E(y): y \in \left[\frac{1}{2}; 1\frac{1}{2}\right].$$

3) Нулей нет.

4) $y > 0$ при всех $x \in D(y)$.

5) Ни четная, ни нечетная.

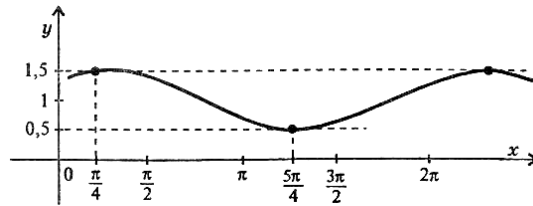
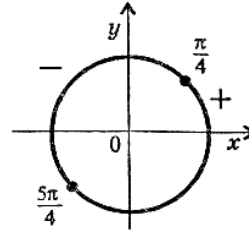
6) Периодическая, период 2π .

$$7) \quad y' = -\frac{1}{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right), \quad \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0,$$

$$x - \frac{\pi}{4} = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$\text{возрастает на } \left[-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n; \frac{\pi}{4} + 2\pi n\right],$$

$$n \in \mathbb{Z}, \text{ убывает на } \left[\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{5\pi}{4} + 2\pi n\right], \quad n \in \mathbb{Z},$$



$$x_{\max} = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad x_{\min} = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n.$$

$$г) \quad y = 1 - \operatorname{tg} 2x.$$

$$1) \quad D(y): 2x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$2) \quad E(y): y \in (-\infty; \infty).$$

$$3) \quad \text{Нули: } \operatorname{tg} 2x = 1, \quad 2x = \frac{\pi}{4} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi m}{2}, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

4) Промежутки знакопостоянства:

$$y > 0, \quad -\frac{\pi}{2} + \pi n < 2x < \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} < x < \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

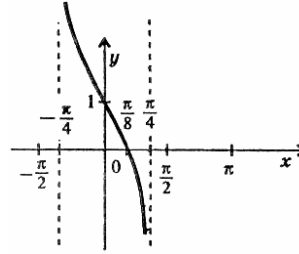
$$y < 0, \quad \frac{\pi}{4} + \pi n < 2x < \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2} < x < \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

5) Ни четная, ни нечетная.

6) Периодичная с периодом $\frac{\pi}{2}$.

$$7) y' = -\frac{2}{\cos^2 2x} < 0$$

при всех $x \in D(y)$,
функция убывает.



108. Поскольку функции $y_1 = \sin \frac{x}{10}$ и $y_2 = x^3$ нечетные, то

$y_1(x_0) = -y_1(-x_0)$ и $y_2(x_0) = -y_2(-x_0)$; значит, $y_1(-x_0) = y_2(-x_0)$,
т.е. x_0 — корень уравнения.

$$109. \text{ а) } \sin\left(\pi + \frac{1}{\pi}\right) - \cos\left(\pi + \frac{1}{\pi}\right) = \sqrt{2} \left(\sin\left(\pi + \frac{1}{\pi}\right) \cos \frac{\pi}{4} - \cos\left(\pi + \frac{1}{\pi}\right) \sin \frac{\pi}{4} \right) =$$

$$= \sqrt{2} \sin\left(\pi + \frac{1}{\pi} - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{1}{\pi}\right), \frac{1}{\pi} < \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{\pi} < \pi,$$

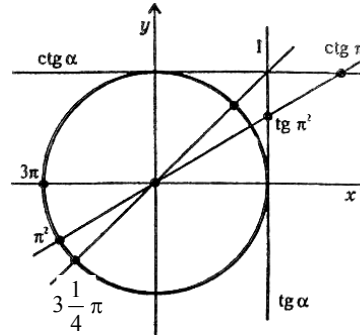
значит, $\sqrt{2} \sin\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{1}{\pi}\right) > 0$, $\sin\left(\pi + \frac{1}{\pi}\right) > \cos\left(\pi + \frac{1}{\pi}\right)$;

$$\text{б) } 3\pi < \pi^2 < 3\frac{1}{4}\pi,$$

значит, $\operatorname{tg} \pi^2 < 1$,

а $\operatorname{ctg} \pi^2 > 1$, тогда

$$\operatorname{tg} \pi^2 < \operatorname{ctg} \pi^2;$$



в) $\operatorname{tg} 2 < -1$, $\operatorname{ctg} 2 > -1$, значит, $\operatorname{tg} 2 < \operatorname{ctg} 2$;

г) $\sin 1 > \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 1 < \frac{\sqrt{2}}{2}$, значит, $\sin 1 > \cos 1$.

110.

а) $\sin \alpha + \cos \alpha > 1$, если $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; $\sin \alpha + \cos \alpha > 1$, $\sin \alpha + \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} > 1$,

$\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} > 1 - \sin \alpha$; возведем в квадрат обе части:

$$1 - \sin^2 \alpha > (1 - \sin \alpha)^2, \quad 1 - \sin^2 \alpha > 1 - 2\sin \alpha + \sin^2 \alpha,$$

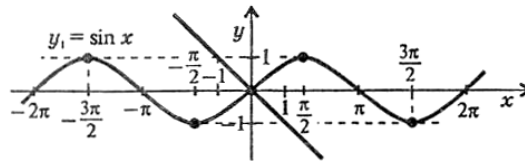
$$-\sin^2 \alpha > -2\sin \alpha + \sin^2 \alpha, \quad -\sin^2 \alpha > \sin \alpha (\sin \alpha - 2),$$

$$-\sin \alpha > \sin \alpha - 2, \quad 1 > \sin \alpha, \quad \text{что верно на } (0; \frac{\pi}{2});$$

б) Так как $|\sin \alpha| \leq 1 < \frac{\pi}{2}$, то $\cos(\sin \alpha) > 0$.

111.

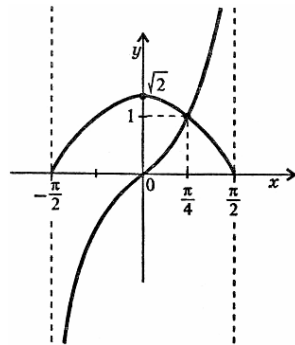
а) $y_1 = \sin x$ и $y_2 = -x$.



Ответ: 0.

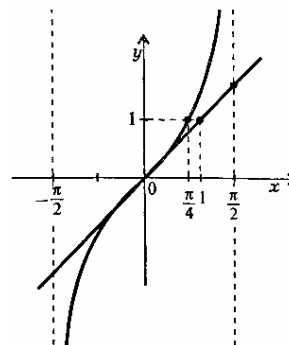
б) $y_1 = \operatorname{tg} x$; $y_2 = \sqrt{2} \cos x$,

$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. Ответ: $\frac{\pi}{4}$.



в) $y_1 = \operatorname{tg} x$; $y_2 = x$.

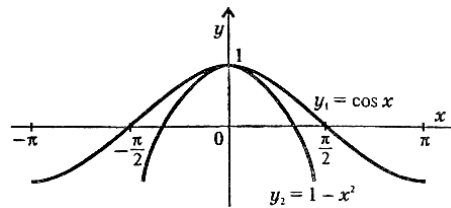
Ответ: 0.



г)

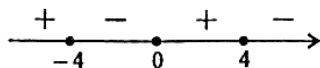
$y_1 = \cos x$
и $y_2 = 1 - x^2$.

Ответ: 0.



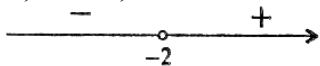
10. Степенная, показательная и логарифмическая функции

112. а) $16x - x^3 \geq 0$, $x(16 - x^2) \geq 0$, $x(4 - x)(4 + x) \geq 0$.



Ответ: $x \in (-\infty; -4]$ и $[0; 4]$.

б) $x^3 + 8 > 0$, $x^3 > -8$, $x > -2$.



Ответ: $x \in (-2; \infty)$.

в) $5 - x - \frac{4}{x} \geq 0$, $\frac{5x - x^2 - 4}{x} \geq 0$, $(-x^2 + 5x - 4)x \geq 0$,

$(-x^2 + 5x - 4)x \geq 0$, $x(x - 1)(x - 4) \leq 0$.



Ответ: $x \in (-\infty; 0) \cup [1; 4]$.

г) $x^2 + x - 20 > 0$, $(x - 4)(x + 5) > 0$.



Ответ: $x \in (-\infty; -5) \cup (4; \infty)$.

113. а) $x^2 \cdot 3^x - 3^{x-1} \geq 0$, $3^x(x^2 - \frac{1}{3}) \geq 0$, $3^x(x - \frac{1}{\sqrt{3}})(x + \frac{1}{\sqrt{3}}) \geq 0$,

$3^x > 0$ при всех x , $x \leq -\frac{1}{\sqrt{3}}$ или $x \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Ответ: $x \in (-\infty; -\frac{1}{\sqrt{3}}] \cup [\frac{1}{\sqrt{3}}; \infty)$.

б) $2^{\sin x} - 1 \geq 0$, $2^{\sin x} \geq 2^0$, $y = 2^x$ — возрастает, $\sin x \geq 0$.

Ответ: $x \in [2\pi n; \pi + 2\pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$.


в) $4 - 3x + x^2 > 0$, $x^2 - 3x + 4 > 0$, $D < 0$.

Ответ: $x \in (-\infty; \infty)$.

г) $\sin x > 0$.

Ответ: $x \in (2\pi n; \pi + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

114.

$$a) \begin{cases} x^2 - 5x + 6 \geq 0, \\ \lg(x+10) \neq 0, \\ (x+10)^2 > 0; \end{cases} \begin{cases} x \leq 2, \quad x \geq 3, \\ x+10 \neq 1, \\ x \neq -10. \end{cases}$$


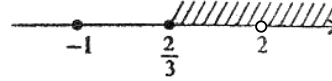
Ответ: $x \in (-\infty; -10) \cup (-10; -9) \cup (-9; 2] \cup [3; \infty)$.

$$б) \begin{cases} \log_5 \cos x \geq 0, \\ \cos x > 0; \end{cases} \quad y = \log_5 t - \text{возрастает}, \quad \begin{cases} \cos x \geq 1, \\ \cos x > 0; \end{cases}$$

$\cos x = 1, \quad x = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

$$в) \begin{cases} 3x - 2 > 0, \\ x^2 - x - 2 \neq 0; \end{cases} \begin{cases} 3x > 2, \\ x \neq 2, \quad x \neq -1; \end{cases} \begin{cases} x > \frac{2}{3}, \\ x \neq 2, \quad x \neq -1. \end{cases}$$

Ответ: $x \in (\frac{2}{3}; 2) \cup (2; \infty)$.



$$г) \begin{cases} \lg(3x^2 - 2x) \geq 0, \\ 3x^2 - 2x > 0; \end{cases} \quad y = \lg t - \text{возрастает}, \quad \begin{cases} 3x^2 - 2x \geq 1, \\ x(3x - 2) > 0; \end{cases}$$

$$3x^2 - 2x - 1 \geq 0, \quad x \geq 1 \text{ или } x \leq -\frac{1}{3}; \quad \begin{cases} x < 0 \text{ или } x > \frac{2}{3}, \\ x \geq 1 \text{ или } x \leq -\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Ответ: $x \in (-\infty; -\frac{1}{3}] \cup [1; \infty)$.

$$115. a) \sqrt{x+1} \geq 0, \quad E(y): y \in [0; \infty); \quad б) y = 25 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x - 1, \quad E(y): y \in (-1; \infty);$$

$$в) E(y): y \in (-\infty; \infty); \quad г) E(y): y \in (0; +\infty).$$

$$116. a) E(y): y \in [\frac{1}{2}; 2]; \quad б) E(y): y \in (-\infty; 2];$$

$$в) E(y): y \in [1; \infty); \quad г) E(y): y \in [1; \infty).$$

$$117. a) \left(\frac{1}{2}\right)^x - 4 > 0, \quad 2^{-x} > 2^2, \quad y = 2^t - \text{возрастает}, \quad -x > 2, \quad x < -2.$$

Ответ: $y > 0$ при $x \in (-\infty; -2)$, $y < 0$ при $x \in (-2; \infty)$.

$$б) \begin{cases} \log_4(x+3) > 0, \\ x+3 > 0; \end{cases} \quad y = \log t - \text{возрастает}, \quad \begin{cases} x+3 > 1, \\ x+3 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x > -2, \\ x > -3; \end{cases} \quad x > -2.$$

Ответ: $y > 0$ при $x \in (-2; \infty)$, $y < 0$ при $x \in (-3; -2)$.

в) $2 - 3^x > 0$, $-3^x > -2$, $3^x < 2$, $y = 3^t$ — возрастает, $x < \log_3 2$.

Ответ: $y > 0$ при $x \in (-\infty; \log_3 2)$, $y < 0$ при $x \in (\log_3 2; \infty)$.

г) $\begin{cases} \sqrt{x} - 4 > 0, \\ x \geq 0; \end{cases} \quad \sqrt{x} > 4, \quad x > 16.$

Ответ: $y > 0$ при $x \in (16; \infty)$, $y < 0$ при $x \in [0; 16)$.

118. а) $4^{x+2} - 4^x > 0$, $16 \cdot 4^x - 4^x > 0$, $15 \cdot 4^x > 0$, x — любое число.

Ответ: $y > 0$ при всех x .

б) $\begin{cases} \lg(x-2) - 1 > 0, \\ x - 2 > 0; \end{cases} \quad \lg(x-2) > 1, \quad y = \lg t \text{ — возрастает,}$

$\begin{cases} \lg(x-2) > \lg 10, \\ x > 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x - 2 > 10, \\ x > 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 12, \\ x > 2. \end{cases}$

Ответ: $y > 0$ при $x \in (12; \infty)$, $y < 0$ при $x \in (2; 12)$.

в) $\begin{cases} \sqrt{x} + 3 > 0, \\ x \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{x} > -3, \\ x \geq 0; \end{cases} \quad x \geq 0.$

Ответ: $y > 0$ при $x \in [0; \infty)$.

г) $2 - \sqrt[3]{x} > 0$, $\sqrt[3]{x} < 2$, $x < 8$.

Ответ: $y > 0$ при $x \in (8; \infty)$, $y < 0$ при $x \in (-\infty; 8)$.

119. а) $y(-x) = 5^{-x} + 5^{-(-x)} = 5^{-x} + 5^x = y(x)$ — четная;

б) $y(-x) = \lg(1 - (-x)^2) = \lg(1 - x^2) = y(x)$ — четная;

в) $y(-x) = \frac{1}{2}^{(-2x)} = 2^{2x}$ — ни четная, ни нечетная;

г) $y(-x) = -x \cdot \sqrt[3]{(-x)} = x \cdot \sqrt[3]{x}$ — четная.

120. а) $y(-x) = (-x)^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{2}{3}} = y(x)$ — четная;

б) $y(-x) = 3^{-x} - 3^{-(-x)} = 3^{-x} - 3^x = -(3^x - 3^{-x}) = -y(x)$ — нечетная;

в) $y(-x) = 2^{\cos(-x)} = 2^{\cos x} = y(x)$ — четная;

г) $y(-x) = \sqrt[5]{(-x)^4} + 1 = \sqrt[5]{x^4} + 1 = y(x)$ — четная.

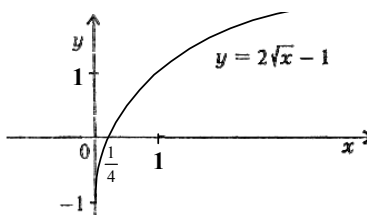
121.

а) 1) $D(y)$: $x \in [0; \infty)$;

2) $E(y)$: $y \in [-1; \infty)$;

3) нули: $2\sqrt{x} - 1 = 0$,

$2\sqrt{x} = 1$, $\sqrt{x} = \frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{4}$;



4) $y > 0$ при $x > \frac{1}{4}$, $y < 0$ при $x \in [0; \frac{1}{4})$;

5) $y' = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $y' > 0$ при всех x , экстремумов нет, возрастает;

6) ни четная, ни нечетная.

б) 1) $D(y)$: $x \in (-\infty; \infty)$;

2) $E(y)$: $y \in (-2; \infty)$;

3) нули: $4^{x-1} = 2$, $2^{2x-2} = 2^1$,

$2x - 2 = 1$, $2x = 3$, $x = 1,5$;

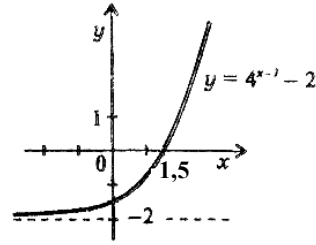
4) $4^{x-1} - 2 > 0$, $2^{2x-2} > 2^1$,

$y = 2^t$ – возрастает, $2x - 2 > 1$,

$2x > 3$, $x > 1,5$, $y > 0$ при $x \in (1,5; \infty)$, $y < 0$ при $x \in (-\infty; 1,5)$;

5) $y' = 4^{x-1} \cdot \ln 4$, $4^{x-1} \cdot \ln 4 > 0$, экстремумов нет, возрастает на $D(y)$;

6) ни четная, ни нечетная, не периодическая.



в) 1) $D(y)$: $x > -1$;

2) $E(y)$: $y \in (-\infty; \infty)$;

3) нули: $\log_2(x+1) = 0$,

$x+1 = 1$, $x = 0$;

4) $\log_2(x+1) > 0$,

$y = \log_2 t$ – возрастает,

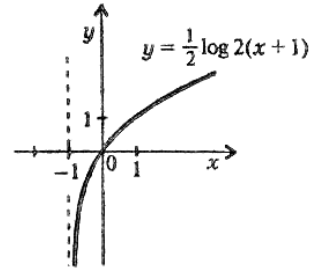
$x+1 > 1$, $x > 0$; $y > 0$ при $x > 0$,

$y < 0$ при $x \in (-1; 0)$;

5) $y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x+1) \ln 2} = \frac{1}{2(x+1) \ln 2} \neq 0$,

экстремумов нет, при $x > -1$ $y' > 0$, возрастает;

6) ни четная, ни нечетная, не периодическая.



г) 1) $D(y)$: $x \in (-\infty; \infty)$;

2) $E(y)$: $y \in (-\infty; \infty)$;

3) нули: $\sqrt[3]{x-2} + 1 = 0$,

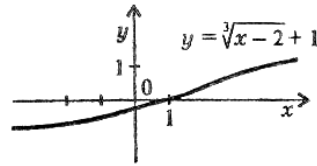
$x-2 = -1$, $x = 1$;

4) $y > 0$ при $x \in (1; \infty)$,

$y < 0$ при $x \in (-\infty; 1)$;

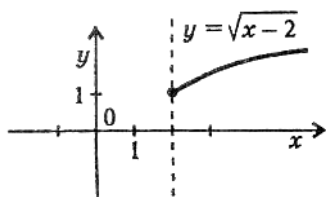
5) $y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-2)^2}} > 0$, при всех x , возрастает, экстремумов нет;

6) ни четная, ни нечетная, не периодическая.

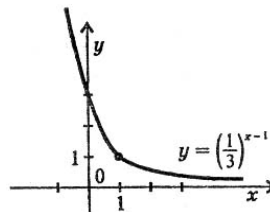


122.

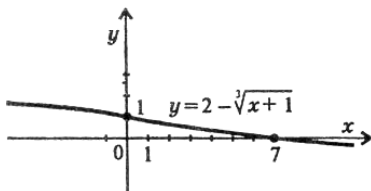
a) $y = \sqrt{x-2} + 1$;



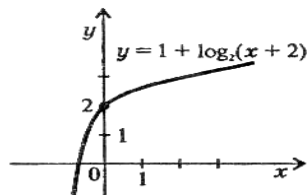
б) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$;



в) $y = 2 - \sqrt[3]{x+1}$;

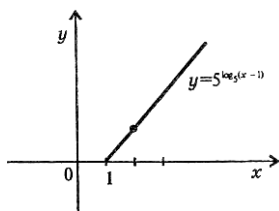


г) $y = 1 + \log_2(x+2)$.

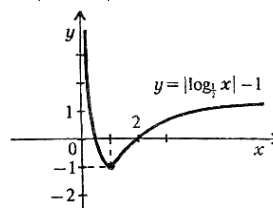


123.

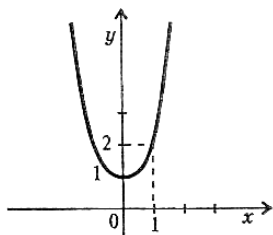
a) $x > 1$, $y = x - 1$, $y = 5^{\log_2(x-1)}$;



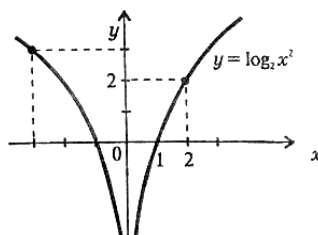
б) $y = \left| \log_{\frac{1}{2}} x \right| - 1$;



в) $y = 2^{|x|}$;



г) $y = \log_2 x^2 = \begin{cases} 2\log_2 x & \text{при } x > 0, \\ 2\log_2(-x) & \text{при } x < 0. \end{cases}$



124. а) $y_{\text{наим}} = 0$ при $x = 6$ или $x = -6$, $y_{\text{наиб}} = 6$ при $x = 0$;

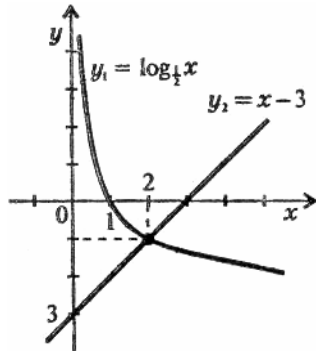
б) $y_{\text{наиб}} = 1$ при $x = 0$, $y_{\text{наим}} = -7$ при $x = -2$;

в) $y_{\text{наиб}} = 3$ при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, $y_{\text{наим}} = \frac{1}{3}$ при $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;

г) $y_{\text{наиб}} = 4$ при $x = -1$, $y_{\text{наим}} = 0$ при $x = 1$.

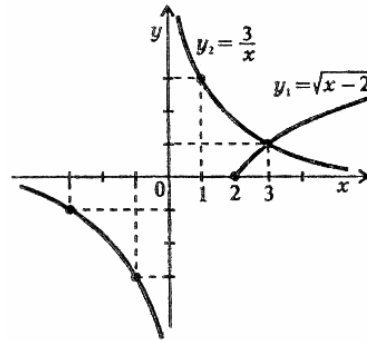
125.

а) $y_1 = \log_{\frac{1}{2}} x$ и $y_2 = x - 3$.



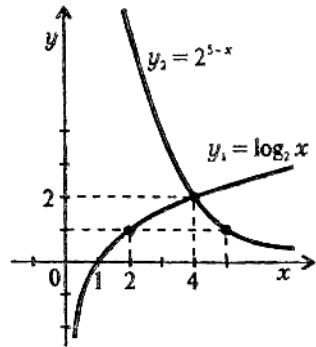
Ответ: 2.

б) $y_1 = \sqrt{x-2}$ и $y_2 = \frac{3}{x}$.



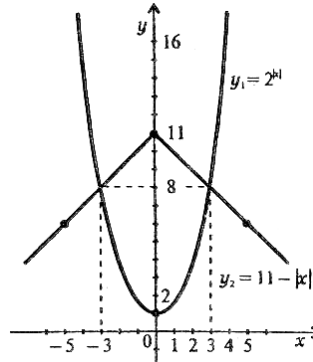
Ответ: 3.

в) $y_1 = \log_2 x$ и $y_2 = 2^{5-x}$.



Ответ: 4.

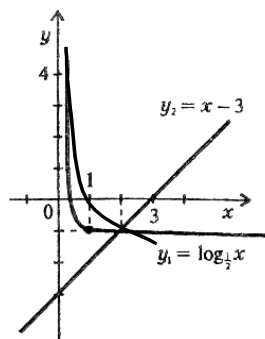
г) $y_1 = 2^{|x|}$ и $y_2 = 11 - |x|$.



Ответ: 3; -3.

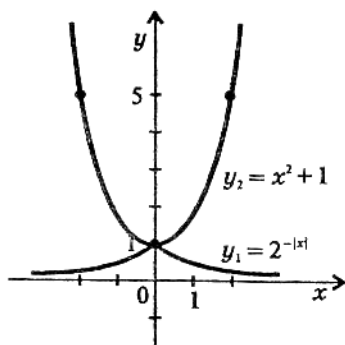
126.

а) $y_1 = \log_{\frac{1}{2}} x$ и $y_2 = x - 3$.



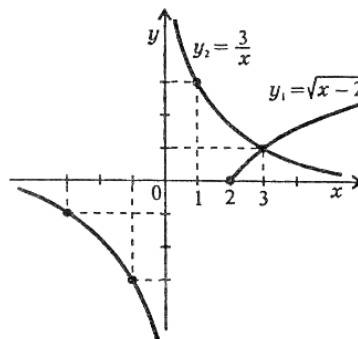
Ответ: $x \in (0; 2)$.

в) $y_1 = 2^{-|x|}$ и $y_2 = x^2 + 1$.



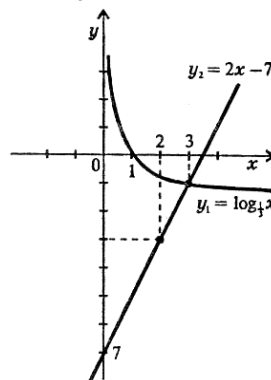
Ответ: 0.

б) $y_1 = \sqrt{x-2}$ и $y_2 = \frac{3}{x}$.



Ответ: $x \in [2; 3]$

г) $y_1 = \log_{\frac{1}{3}} x$ и $y_2 = 2x - 7$.



Ответ: $x \in (0; 3)$.

127.

$y = (\log_2 3)^{\sin x}$, $y = (\log_3 2)^{\cos x}$.

$\log_2 3 > 1$, значит, наибольшее значение первой функции равно $\log_2 3$ при $\sin x = 1$; $\log_3 2 < 1$, поэтому наибольшее значение второй функции достигается при $\cos x = -1$ и равно $\frac{1}{\log_3 2}$. $\log_2 3 = \frac{1}{\log_3 2}$.

128. а) $D(y): \begin{cases} 4x+1 > 0, \\ 1-x^2 \geq 0; \end{cases} \begin{cases} x > -\frac{1}{4}, \\ -1 \leq x \leq 1; \end{cases} x \in (-\frac{1}{4}; 1];$

$$\frac{1}{\sqrt{4x+1}} - \sqrt{1-x^2} = 0, \quad \frac{1}{\sqrt{4x+1}} = \sqrt{1-x^2}, \quad \frac{1}{4x+1} = 1-x^2,$$

$$(4x+1)(1-x^2) = 1, \quad 4x - 4x^3 + 1 - x^2 = 1,$$

$$-4x^3 - x^2 + 4x = 0, \quad -x(4x^2 + x - 4) = 0, \quad x_1 = 0, \quad 4x^2 + x - 4 = 0,$$

$$D = 65, \quad x_2 = \frac{\sqrt{65}-1}{8}, \quad x_3 = \frac{-1-\sqrt{65}}{8} - \text{не входит в } D(y);$$

б) $D(f): \begin{cases} x+15 > 0, \\ x > 0; \end{cases} x > 0; \quad 2 = \lg x(x+15), \quad x^2 + 15x = 100,$

$$x^2 + 15x - 100 = 0, \quad x_1 = -20 - \text{не входит в } D(f), \quad x_2 = 5.$$

129. а) Пусть $x_1 > x_2$ на R , тогда рассмотрим разность

$$y(x_1) - y(x_2) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x_1+1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{x_2+1} = \frac{1}{3} \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{x_1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{x_2} \right) < 0,$$

$$y(x_1) < y(x_2). \text{ Таким образом, } y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} \text{ убывает на } R;$$

б) $x_1 > x_2$ на $(0; \infty)$. $f(x_1) - f(x_2) = \log_2 3x_1 - \log_2 3x_2 = \log_2 \frac{x_1}{x_2} > 0$ (т.к.

$\log_2 t$ — возрастает и $\frac{x_1}{x_2} > 1$), а, значит, $f(x) = \log_2 3x$ возрастает на $(0; \infty)$.

§ 4. Уравнения, неравенства, системы уравнений и неравенств

11. Рациональные уравнения и неравенства

130.

а) $3(x-2) - 5 = 4 - (5x-1), \quad 3x - 6 - 5 = 4 - 5x + 1, \quad 8x = 16, \quad x = 2;$

б) $|2x-3| = 5, \quad 2x-3 = 5 \text{ или } 2x-3 = -5, \quad 2x = 8 \text{ или } 2x = -2, \quad x_1 = 4$
или $x_2 = -1$. Ответ: $-1; 4$.

в) $7 - 2(3-x) = 4(x-1) + 5, \quad 7 - 6 + 2x = 4x - 4 + 5, \quad -2x = 0, \quad x = 0;$

г) $|4-3x| = 2, \quad 4-3x = 2 \text{ или } 4-3x = -2, \quad -3x = -2 \text{ или } -3x = -6,$
 $x_1 = \frac{2}{3} \text{ или } x_2 = 2. \quad \text{Ответ: } \frac{2}{3}; 2.$

131. а) $\frac{3x+1}{5} = 2 - \frac{4(x-3)}{15}$, $3(3x+1) = 30 - 4(x-3)$, $9x+3 = 30 - 4x+12$,

$13x = 39$, $x = 3$. Ответ: 3.

б) $\left| \frac{x-3}{2} + 5 \right| = 4$, $\frac{x-3}{2} + 5 = 4$ или $\frac{x-3}{2} + 5 = -4$, $x-3+10 = 8$ или

$x-3+10 = -8$, $x = 1$, $x = -15$. Ответ: 1; -15.

в) $1 - \frac{x-3}{2} = x - \frac{3(5-2x)}{7}$, $14 - 7(x-3) = 14x - 6(5-2x)$,

$14 - 7x + 21 = 14x - 30 + 12x$, $-33x = -65$, $x = \frac{65}{33}$, $x = 1\frac{32}{33}$;

г) $\left| 1 - \frac{x+2}{3} \right| = 5$, $1 - \frac{x+2}{3} = 5$ или $1 - \frac{x+2}{3} = -5$, $1 - x = 15$ или

$1 - x = -15$, $x_1 = -14$ или $-x = -16$, $x_2 = 16$. Ответ: 16; -14.

132. а) $ax - 2x = 3(x-1)$, $ax - 2x - 3x = -3$, $(a-5)x = -3$; при $a \neq 5$ одно решение; при $a = 5$ — нет решений;

б) $a(1-x) + 2 = 3x - ax$, $a - ax + 2 - 3x + ax = 0$, $-3x = a + 2$,

$3x = a + 2$; при любых a одно решение;

в) $x(2-a) - x = 5 + x$, $2x - ax - x - x = 5$, $-ax = 5$; при $a \neq 0$ одно решение; при $a = 0$ нет решений;

г) $5+3(x+3a)=9a+5$, $3x - 9a - 9a$, $3x = 0$; при любых a одно решение.

133. а) $\frac{x-1}{2} + x < 1,5x + 3,5$, $x-1+2x < 3x+7$, $0 \cdot x < 8$. Ответ: $x \in (-\infty; \infty)$.

б) $\frac{5x-2}{3} - \frac{3-x}{2} > 1$, $2(5x-2) - (3-x)3 > 6$, $10x - 4 - 9 + 3x > 6$,

$13x > 19$, $x > 1\frac{6}{13}$. Ответ: $x \in (1\frac{6}{13}; \infty)$.

в) $x - 4(3-x) \geq 2x + 7$, $x - 12 + 4x - 2x \geq 7$, $3x \geq 19$, $x \geq 6\frac{1}{3}$.

Ответ: $x \in [6\frac{1}{3}; \infty)$.

г) $3 + \frac{2-3x}{4} \leq 2x$, $14 - 3x \leq 8x$, $11x \geq -14$, $x \geq 1\frac{3}{11}$. Ответ: $x \in [1\frac{3}{11}; \infty)$.

134. а) $|4x-3| < 5$, $-5 < 4x-3 < 5$, $-2 < 4x < 8$, $-\frac{1}{2} < x < 2$. Ответ: $x \in (-\frac{1}{2}; 2)$.

б) $|2x+5| \geq 1$, $\begin{cases} 2x+5 \geq 1, \\ 2x+5 \leq -1; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -2, \\ x \leq -3. \end{cases}$ Ответ: $x \in (-\infty; -3] \cup [-2; \infty)$.

в) $\frac{|x-7|}{3} \leq 2, |x-7| \leq 6, -6 \leq x-7 \leq 6, 1 \leq x \leq 13.$

г) $4|2-x| \leq 12, |2-x| \leq 3, -3 \leq 2-x \leq 3, -5 \leq -x \leq 1, -1 \leq x \leq 5.$

135. а) $\frac{|2x-3|}{x} > 0, x > 0, \text{ поскольку } |2x-3| \geq 0; 2x-3 \neq 0, x \neq \frac{3}{2}.$

Ответ: $x \in (0; \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}; \infty).$

б) $\frac{x+2}{|x+4|} \leq 0, x+2 \leq 0, x \leq -2, \text{ так как } |x+4| \geq 0, \text{ но } x \neq -4.$

Ответ: $x \in (-\infty; -4) \cup (-4, -2].$

в) $(x-4)|5-3x| < 0, x-4 < 0, x < 4, \text{ так как } |5-3x| \geq 0; 5-3x \neq 0.$

$x \neq 1\frac{2}{3}.$ Ответ: $x \in (-\infty; 1\frac{2}{3}) \cup (1\frac{2}{3}; 4).$

г) $|2x+7|(3-x) \leq 0, 3-x \leq 0, x \geq -3, \text{ так как } |2x+7| \geq 0 \text{ и } x = -3, 5.$

Ответ: $x \in \{-3, 5\} \cup [3; +\infty).$

136. а) $x^2+2x-15=0, x_1=-5, x_2=3.$

б) $7x^2+5x=0, x(7x+5)=0, x_1=0 \text{ и } 7x+5=0, x_2=-\frac{5}{7}.$

в) $(x-3)(x-2)=6(x-3), (x-3)(x-8)=0, x_1=3, x_2=8.$

г) $x^2 - \frac{11x}{6} + \frac{1}{2} = 0, 6x^2 - 11x + 3 = 0, D = 121 - 72 = 49, x_1 = \frac{11+7}{12},$

$x_2 = \frac{11-7}{12}, x_1 = 1,5, x_2 = \frac{1}{3}.$

137. а) Если имеется общий корень, то $x^2 - ax = x^2 - x - 3a, -ax = -x - 3a,$
 $3a - ax = -x, a(3-x) = -x, a = \frac{x}{x-3}.$ При этом a оба выражения равны

нулю: $x^2 - \frac{x}{x-3} \cdot x = 0, x^2 \left(1 - \frac{1}{x-3}\right) = 0, x_1 = 0 \text{ или } x - 4 = 0, x_2 = 4.$

$a_1 = 0$ или $a_2 = 4.$ Ответ: 0; 4.

б) $x^2 - (a-1)x - 3 = 4x^2 - (4a+3)x + 9, 3x^2 - (4a+3)x + (a-1)x + 12 = 0,$

$3x^2 + 12 = (4a + -a + 1)x, 3a + 4 = \frac{3x^2 + 12}{x} = \frac{3x^2 - 4x + 12}{3x}.$ При

этом a оба выражения равны нулю:

$$x^2 - \left(\frac{3x^2 - 4x + 12}{3x} \right) x - 3 = 0, \quad x^2 - \frac{1}{3} (3x^2 - 4x + 12) + x - 3 = 0,$$

$$3x^2 - 3x^2 + 4x - 12 + 3x - 9 = 0, \quad 7x - 21 = 0, \quad x = 3.$$

$$a = \frac{3 \cdot 9 - 3 \cdot 4 + 12}{3 \cdot 3} = 3.$$

$$\text{в) } x^2 + ax + 8 = x^2 + x + a, \quad a(x-1) = x-8, \quad a = \frac{x-8}{x-1}.$$

Но при этом a каждое из данных выражений обращается в ноль,

$$\text{так что } x^2 + \frac{x-8}{x-1} x + 8 = 0, \quad x^2(x-1) + (x-8)x + 8(x-1) = 0,$$

$$x^3 - x^2 + x^2 - 8x + 8x - 8 = 0, \quad x^3 = 8, \quad x = 2. \text{ При } x = 2 \text{ получим}$$

$$a = \frac{2-8}{2-1} = -6.$$

Ответ: -6.

$$\text{г) } 2x^2 + (3a-1)x - 3 = 6x^2 - (2a-3)x - 1,$$

$$4x^2 - (2a-3)x - (3a-1)x + 2 = 0,$$

$$(5a-4)x = 4x^2 + 2,$$

$$5a-4 = \frac{4x^2+2}{x}, \quad a = \frac{4x^2+4x+2}{x}. \quad \text{При этом } a \text{ оба значения}$$

$$\text{должны обращаться в ноль; } 2x^2 + \left(3 \cdot \frac{4x^2+4x+2}{5x} - 1 \right) x - 3 = 0,$$

$$2x^2 + \frac{3}{5} (4x^2 + 4x + 2) - x - 3 = 0, \quad 10x^2 + 12x^2 + 12x + 6 - 5x - 15 = 0,$$

$$22x^2 + 7x - 9 = 0, \quad D = 49 + 9 \cdot 88 = 841, \quad x_1 = \frac{-7 \pm \sqrt{841}}{44}, \quad x_2 = \frac{-7 \pm 29}{44},$$

$$x_1 = \frac{1}{2} \text{ или } x_2 = -\frac{9}{11}. \text{ Тогда } a_1 = \frac{4 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{2} + 2}{5 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1+2+2}{5 \cdot \frac{1}{2}} = 2 \text{ или}$$

$$a_2 = \frac{4 \cdot \frac{81}{121} - 4 \cdot \frac{9}{11} + 2}{-5 \cdot \frac{9}{11}} = \frac{4 \cdot \frac{81}{121} - 4 \cdot 9 + 22}{-5 \cdot 9} = \frac{4 \cdot 81 - 14 \cdot 11}{-5 \cdot 9 \cdot 11} =$$

$$= \frac{2}{5 \cdot 99} (77 - 2 \cdot 81) = -\frac{2 \cdot 85}{5 \cdot 99} = -\frac{34}{99}. \quad \text{Ответ: } 2, -\frac{34}{99}.$$

138. а) $D = (k+4)^2 - 4(k+7)(k-1) = -3k^2 - 16k + 44, -3k^2 - 16k + 44 = 0,$

или $k_1 = 2, k_2 = -7\frac{1}{3}$; при $k = 1$ также одно решение.

Ответ: $k = 2, k = -7\frac{1}{3}$ и $k = 1$.

б) $9x^2 - 2x + k - 6 + kx = 0, 9x^2 + (k-2)x + k - 6 = 0,$

$$D = (k-2)^2 - 4(k-6) \cdot 9 = k^2 - 40k + 220,$$

$$k^2 - 40k + 220 = 0, D_1 = 1600 - 880 = 720, k_1 = \frac{40 + \sqrt{720}}{2},$$

$$k_1 = 20 + 6\sqrt{5}, k_2 = \frac{40 - \sqrt{720}}{2}, k_2 = 20 - 6\sqrt{5}.$$

Ответ: при $k = 20 + 6\sqrt{5}$ и $k = 20 - 6\sqrt{5}$.

в) $D = (2(k-1))^2 - 4 \cdot 3 \cdot (2k-5) = 4k^2 - 8k + 4 - 24k + 60 = 4k^2 - 32k + 64,$

$$k^2 - 8k + 16 = 0, k = 4; \text{ при } k=4; \text{ при } k=2,5 \text{ также } x = 1 - \text{один корень.}$$

Ответ: при $k = 4$ и $k = 2,5$.

г) $D = 36 - 4(k-2) \cdot 3k = 36 - 12k^2 + 24k, -12k^2 + 24k + 36 = 0,$

$$k^2 - 2k - 3 = 0, k_1 = 3, k_2 = -1; \text{ при } k = 0 - \text{одно решение.}$$

Ответ: при $k = -1, k = 3$ и $k = 0$.

139. а) $x_1 + x_2 = \frac{5}{3};$ б) $x_1 \cdot x_2 = -\frac{2}{3};$

в) $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2 + \frac{2 \cdot 2}{3} = \frac{25}{9} + \frac{4}{3} = \frac{37}{9} = 4\frac{1}{9};$

г) $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1 \cdot x_2 + x_2^2) = (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 - x_1 \cdot x_2) =$

$$= \frac{5}{3} \cdot \left(4\frac{1}{9} + \frac{2}{3}\right) = \frac{5}{3} \cdot \left(\frac{37+6}{9}\right) = \frac{5 \cdot 43}{3 \cdot 9} = \frac{215}{27}.$$

140. а) $\frac{6x - x^2 - 6}{x-1} - \frac{2x-3}{x-1} = 1, x \neq 1, 6x - x^2 - 6 - 2x + 3 - x + 1 = 0,$

$$-x^2 + 3x - 2 = 0, x^2 - 3x + 2 = 0, x_1 = 2, x_2 = 1 - \text{не удовлетворяется.}$$

б) $\frac{2x+1}{x} + \frac{4x}{2x+1} = 5, x \neq 0, x \neq -\frac{1}{2}, (2x+1)^2 + 4x^2 - 5x(2x+1) = 0,$

$$4x^2 + 4x + 1 + 4x^2 - 10x^2 - 5x = 0, \quad 2x^2 + x - 1 = 0,$$

$$x_1 = -1, \quad x_2 = \frac{1}{2}. \quad \text{Ответ: } 0,5; -1.$$

$$\text{в) } \frac{2}{x^2 + 5x} + \frac{3}{2x - 10} = \frac{5}{x^2 - 25}, \quad x \neq 0, \quad x \neq 5, \quad x \neq -5,$$

$$\frac{4(x-5) + 3x(x+5) - 30x}{2x(x^2 - 25)} = 0,$$

$$4x - 20 + 3x^2 + 15x - 30x = 0, \quad 3x^2 - 11x - 20 = 0, \quad x_1 = -\frac{4}{3}, \quad x_2 = 5 - \text{ при}$$

$$x_2 \text{ условие лишено смысла.} \quad \text{Ответ: } -\frac{4}{3}.$$

$$\text{г) } \frac{14}{x^2 - 4} + \frac{3}{(2-x)^2} = \frac{5}{(x+2)^2}, \quad x \neq 2, \quad x \neq -2, \quad \frac{14}{x^2 - 4} + \frac{3}{(x-2)^2} - \frac{5}{(x+2)^2} = 0,$$

$$14(x+2)(x-2) + 3(x+2)^2 - 5(x-2)^2 = 0,$$

$$14x^2 - 56 + 3x^2 + 12x + 12 - 5x^2 + 20x - 20 = 0;$$

$$3x^2 + 8x - 16 = 0, \quad x_1 = -4, \quad x_2 = 1\frac{1}{3}.$$

$$\text{141. а) } \frac{4}{x^2 + 4} + \frac{5}{x^2 + 5} = 2, \quad 4(x^2 + 5) + 5(x^2 + 4) - 2(x^2 + 4)(x^2 + 5) = 0,$$

$$4x^2 + 20 + 5x^2 + 20 - 2x^4 - 18x^2 - 40 = 0, \quad -2x^4 - 9x^2 = 0, \quad x = 0;$$

$$\text{б) } 2x^4 - 5x^2 + 2 = 0.$$

$$x^2 = 2 \text{ или } x^2 = \frac{1}{2}, \quad x_1 = \sqrt{2}, \quad x_2 = -\sqrt{2}, \quad x_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\text{в) } \left(\frac{x-1}{x}\right)^2 - 3\left(\frac{x-1}{x}\right) + 2 = 0, \quad x \neq 0. \text{ Пусть } \frac{x-1}{x} = y, \text{ тогда}$$

$$y^2 - 3y + 2 = 0, \quad y_1 = 2, \quad y_2 = 1, \quad \frac{x_1 - 1}{x_1} = 2, \quad \frac{x_2 - 1}{x_2} = 1, \quad x_1 - 1 - 2x_1 = 0,$$

$$x_1 = -1; \quad x_2 - 1 = x_2 - \text{ корней нет;}$$

$$\text{г) } \frac{x^2 + 1}{x} + \frac{x}{x^2 + 1} = 2,5, \quad x \neq 0. \text{ Пусть } \frac{x^2 + 1}{x} = y, \quad y \neq 0,$$

$$y + \frac{1}{y} - \frac{5}{2} = 0, \quad 2y^2 - 5y + 2 = 0, \quad y_1 = 2, \quad y_2 = \frac{1}{2},$$

$$\frac{x_1^2 + 1}{x_1} = 2, \frac{x_2^2 + 1}{x_2} = \frac{1}{2}, x_1^2 - 2x_1 + 1 = 0, x_1 = 1;$$

$$2x_2^2 - x_2 + 2 = 0 - \text{корней нет.}$$

Ответ: 1.

142. а) $2x^2 + 6x + 17 > 0$, $2x^2 + 6x + 17 = 0$, $D < 0$, так как

$a = 2 > 0$ и $D < 0$, то $2x^2 + 6x + 17 > 0$ при всех x . Ответ: $x \in (-\infty; \infty)$.

б) $x^2 - 3,2x < 0$, $x^2 - 3,2x = 0$, $x(x - 3,2) = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 3,2$; $x^2 - 3,2x < 0$ при $0 < x < 3,2$;

в) $(3x - 2)^2 - 4x(2x - 3) \geq 0$, $9x^2 - 12x + 4 - 8x^2 + 12x \geq 0$, $x^2 + 4 \geq 0$

при любом x .

Ответ: $x \in (-\infty; \infty)$.

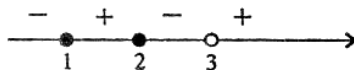
г) $(6x - 1)(1 + 6x) + 14 < 7x(2 + 5x)$, $36x^2 - 1 + 14 - 14x - 35x^2 < 0$,

$x^2 - 14x + 13 < 0$; $x^2 - 14x + 13 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 13$; $x^2 - 14x + 13 < 0$ при $1 < x < 13$.

143.

а) $\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)} \geq 0$; $y(-2) < 0$, $y\left(\frac{1}{2}\right) > 0$,

$$y\left(\frac{5}{2}\right) < 0, y(4) > 0.$$



Ответ: $x \in [1; 2] \cup (3; \infty)$.

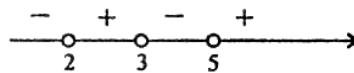
б) $\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 2x + 8} \leq 0$; $\frac{(x-1)(x+3)}{(x^2 - 2x + 8)} \leq 0$, $x^2 - 2x + 8 > 0$ при любом x ,

$$(x-1)(x+3) \leq 0, -3 \leq x \leq 1.$$

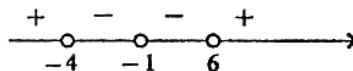
Ответ: $x \in [-3; 1]$.

в) $\frac{x-2}{(x-3)(x-5)} < 0$; $(x-2)(x-3)(x-5) < 0$.

Ответ: $x \in (-\infty; 2) \cup (3; 5)$.



г) $\frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 - 5x - 6} > 0$;



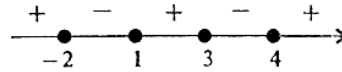
$$\frac{(x+1)(x+4)}{(x-6)(x+1)} > 0, (x+1)^2(x+4)(x-6) > 0.$$

Ответ: $x \in (-\infty; -4) \cup (6; \infty)$.

144.

а) $(x-1)(x+2)(x-3)(x-4) \leq 0$.

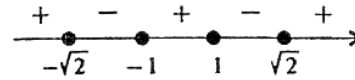
Ответ: $x \in [-2; 1] \cup [3; 4]$.



б) $x^4 - 3x^2 + 2 \leq 0$; $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$,

$x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = \sqrt{2}$, $x_4 = -\sqrt{2}$;

$(x+1)(x-1)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}) \leq 0$. $x \in [-\sqrt{2}; -1] \cup [1; \sqrt{2}]$.



в) $\frac{4-x}{x-5} > \frac{1}{1-x}$, $\frac{(4-x)(1-x)-(x-5)}{(x-5)(1-x)} > 0$,

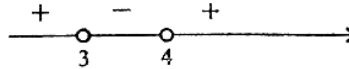
$\frac{4-5x+x^2-x+5}{(x-5)(1-x)} > 0$, $\frac{x^2-6x+9}{(x-5)(1-x)} > 0$, $\frac{(x-3)^2}{(x-5)(1-x)} > 0$,

$(x-3)^2 > 0$ при $x \neq 3$, $(x-5)(1-x) > 0$ при $1 < x < 5$.

Ответ: $x \in (1; 3) \cup (3; 5)$.

г) $1 + \frac{12}{x^2} < \frac{7}{x}$, $x \neq 0$, $\frac{x^2+12-7x}{x^2} < 0$, $\frac{x^2-7x+12}{x^2} < 0$,

$\frac{(x-3)(x-4)}{x^2} < 0$, $(x-3)(x-4) \cdot x^2 < 0$, $x^2 > 0$ при $x \neq 0$.



Ответ: $x \in (3; 4)$.

145.

а) $m + \frac{4}{m} - 4 = \frac{m^2 - 4m + 4}{m} = \frac{(m-2)^2}{m}$, при $m > 0$ выражение больше нуля;

б) $\frac{2m}{1+m^2} - 1 = \frac{2m-1-m^2}{1+m^2} = -\frac{(m-1)^2}{1+m^2}$, эта разность при всех m неположительна, значит, $\frac{2m}{1+m^2} \leq 1$ при любых m ;

в) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{ab} = \frac{(a-b)^2}{ab}$, при $a > 0$ и $b > 0$ эта разность неотрицательна, значит, $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$;

г) $\frac{a}{b} - \frac{a+c}{b+c} = \frac{ab+ac-ab-bc}{b(b+c)} = \frac{c(a-b)}{b(b+c)}$. Эта разность при $a > 0$,

$b > 0$, $c > 0$ и $a < b$ отрицательна. Таким образом $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$.

12. Иррациональные уравнения и неравенства

146. а) $\sqrt{x^2 + 2x + 10} = 2x - 1$; $x^2 + 2x + 10 > 0$ при любых x $D < 0$;

$$2x - 1 \geq 0, \quad x \geq \frac{1}{2}; \quad x^2 + 2x + 10 = (2x - 1)^2, \quad x^2 + 2x + 10 - 4x^2 + 4x - 1 = 0,$$

$$3x^2 - 6x - 9 = 0, \quad x^2 - 2x - 3 = 0, \quad x_1 = 3, \quad x_2 = -1 \quad \text{— не удовлетворяет}$$

$$\text{условию } x = \frac{1}{2}.$$

Ответ: 3.

б) $\sqrt{x^2 - 16} = x^2 - 22$; $\begin{cases} x^2 - 16 \geq 0, \\ x^2 - 22 \geq 0; \end{cases} \begin{cases} |x| \geq 4, \\ |x| \geq \sqrt{22}; \end{cases}$

$$x^2 - 16 = (x^2 - 22)^2, \quad x^2 - 16 = x^4 - 44x^2 + 484, \quad x^4 - 45x^2 + 500 = 0,$$

$$x^2 = 25 \quad \text{или} \quad x^2 = 20, \quad x_1 = 5, \quad x_2 = -5, \quad x_3 = -2\sqrt{5}, \quad x_4 = 2\sqrt{5};$$

$$x_3, x_4 \text{ не удовлетворяют условию } |x| \geq \sqrt{22}.$$

в) $\sqrt{17 + 2x - 3x^2} = x + 1$; $\begin{cases} x + 1 \geq 0, \\ -3x^2 + 2x + 17 \geq 0; \end{cases}$

$$17 + 2x - 3x^2 = x^2 + 2x + 1, \quad 4x^2 - 16 = 0, \quad x = 2, \quad x = -2 \quad \text{— не удовлетворяют условию.}$$

г) $\sqrt{x^2 + 9} = x^2 - 11$; $x^2 - 11 \geq 0, x \leq -\sqrt{11}$ или $x \geq \sqrt{11}$;

$$x^2 + 9 = x^4 - 22x^2 + 121, \quad x^4 - 23x^2 + 112 = 0, \quad x_1 = 4, \quad x_2 = -4, \quad x_3 = -\sqrt{7},$$

$$x_4 = \sqrt{7}, \quad x_3, x_4 \text{ не удовлетворяют условиям.}$$

147. а) $\sqrt{x + 17} - \sqrt{x - 7} = 4$; $\begin{cases} x + 17 \geq 0, \\ x - 7 \geq 0; \end{cases} \quad x \geq 7$;

$$x + 17 - 2\sqrt{(x + 17)(x - 7)} + x - 7 = 16, \quad 2x - 6 - 2\sqrt{(x + 17)(x - 7)} = 0,$$

$$\sqrt{(x + 17)(x - 7)} = x - 3, \quad (x + 17)(x - 7) = x^2 - 6x + 9,$$

$$x^2 - 7x + 17x - 119 - 9 + 6x - x^2 = 0, \quad 16x = 128, \quad x = 8. \quad \text{Ответ: } 8.$$

б) $2\sqrt{x-1} + \sqrt[4]{x-1} = 3$; $x-1 \geq 0, x \geq 1$. Пусть $\sqrt[4]{x-1} = y$, тогда

$$2y^2 + y - 3 = 0, \quad y_1 = 1, \quad y_2 = -\frac{3}{2}; \quad \sqrt[4]{x-1} = 1, \quad x-1 = 1, \quad x = 2; \quad \text{или} \quad \sqrt[4]{x-1} =$$

$$= -\frac{3}{2} \quad \text{— не имеет смысла.}$$

в) $\sqrt{x+7} + \sqrt{x-2} = 9$; $\begin{cases} x+7 \geq 0, \\ x-2 \geq 0; \end{cases} \quad x+7 + 2\sqrt{(x+7)(x-2)} + x-2 = 81,$

$$\begin{aligned}
& 2x + 5 + 2\sqrt{(x+7)(x-2)} = 81, \quad 2\sqrt{(x+7)(x-2)} = 76 - 2x, \\
& \sqrt{(x+7)(x-2)} = 38 - x, \quad x < 38, \quad (x+7)(x-2) = 1444 - 76x + x^2, \\
& x^2 - 2x + 7x - 14 = 1444 - 76x + x^2, \quad 81x = 1458, \quad x = 18. \quad \text{Ответ: } 18. \\
& \text{г) } 2\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[6]{x+1} = 6; \quad x+1 \geq 0, \quad x \geq -1. \quad \text{Пусть } \sqrt[6]{x+1} = y, \quad \text{тогда} \\
& 2y^2 - y - 6 = 0, \quad y_1 = -1\frac{1}{2}, \quad y_2 = 2; \quad \sqrt[6]{x+1} = 2 \quad \text{или} \quad \sqrt[6]{x+1} = -1\frac{1}{2} - \text{не} \\
& \text{имеет смысла. } x+1 = 64, \quad x = 63. \quad \text{Ответ: } 63. \\
& \mathbf{148. а) } \sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt{2+x}} + \sqrt{2+x} = 0; \quad \begin{cases} x \geq 0, \\ 2+x \geq 0; \end{cases} \quad x \geq 0; \\
& \sqrt{x(2+x)} - 4 + 2 + x = 0, \quad \sqrt{x(2+x)} = 2 - x, \quad x \leq 2, \quad 8x + x^2 = 4 - 4x + x^2, \\
& 6x = 4, \quad x = \frac{2}{3}. \\
& \text{б) } \sqrt{x} + \sqrt[4]{x} - 2 = 0; \quad x \geq 0. \quad \text{Пусть } \sqrt[4]{x} = y, \quad \text{тогда } y^2 + y - 2 = 0, \\
& y_1 = -2, \quad y_2 = 1; \quad \sqrt[4]{x_1} = -2 - \text{не имеет смысла. } \sqrt[4]{x_2} = 1, \quad x_2 = 1; \\
& \text{в) } \frac{x - \sqrt{x+5}}{x + \sqrt{x+5}} = \frac{1}{7}; \quad x+5 \geq 0, \quad x \geq -5; \quad 7x - 7\sqrt{x+5} = x + \sqrt{x+5}, \\
& 6x = 8\sqrt{x+5}, \quad 36x^2 = 64(x+5), \quad 36x^2 = 64x + 320, \quad 9x^2 - 16x - 80 = 0, \\
& x_1 = 4, \quad x_2 = -\frac{20}{9}, \quad x_2 = -2\frac{2}{9}. \quad \text{Ответ: } 4; \quad -2\frac{2}{9}. \\
& \text{г) } \sqrt[3]{3x+1} - \sqrt{3x+1} = 0; \quad 3x+1 \geq 0, \quad x \geq -\frac{1}{3}; \quad \sqrt[6]{(3x+1)^2} - \sqrt[6]{(3x+1)^3} = 0; \\
& \sqrt[6]{(3x+1)^2} (1 - \sqrt[6]{3x+1}) = 0, \quad \sqrt[3]{3x+1} = 0 \quad \text{или} \quad 1 - \sqrt[6]{3x+1} = 0, \\
& 3x+1 = 0, \quad \sqrt[6]{3x+1} = 1, \quad x = -\frac{1}{3}; \quad 3x+1 = 1, \quad x = 0. \quad \text{Ответ: } -\frac{1}{3}; 0. \\
& \mathbf{149. а) } \sqrt{225+x^2} = x^2 - 47; \quad x^2 - 47 \geq 0, \quad x^2 \geq 47, \quad x \leq -\sqrt{47} \quad \text{или} \quad x \geq \sqrt{47}; \\
& 225 + x^2 = x^4 - 94x^2 + 2209, \quad x^4 - 95x^2 + 1984 = 0. \quad \text{Пусть } x^2 = y, \\
& \text{тогда } y^2 - 95y + 1984 = 0, \quad y_1 = 64, \quad y_2 = 31; \quad x^2 = 64 \quad \text{или} \quad x^2 = 31, \\
& x_1 = 8, \quad x_2 = -8, \quad x_3 = \sqrt{31} - \text{не удовлетворяет условиям, } x_4 = -\sqrt{31} \\
& - \text{не удовлетворяет условиям.} \quad \text{Ответ: } -8; 8. \\
& \text{б) } \sqrt[3]{x-2} = x-2, \quad \sqrt[3]{x-2} - \sqrt[3]{(x-2)^3} = 0, \quad \sqrt[3]{x-2} (1 - \sqrt[3]{(x-2)^2}) = 0; \\
& \sqrt[3]{x-2} = 0 \quad \text{или} \quad 1 - \sqrt[3]{(x-2)^2} = 0, \quad x_1 = 2, \quad \sqrt[3]{(x-2)^2} = 1, \\
& x-2 = \pm 1, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = 1. \quad \text{Ответ: } 2; 3; 1.
\end{aligned}$$

в) $\sqrt{x^2 + 36} = x^2 - 54$; $x^2 - 54 \geq 0$, $x < -\sqrt{54}$ или $x > \sqrt{54}$,
 $x^4 - 109x^2 + 2880 = 0$. Тогда $x^2 = y$, тогда $y^2 - 109y + 2880 = 0$,
 $y_1 = 64$, $y_2 = 45$; $x^2 = 64$ и $x^2 = 45$, $x_1 = 8$, $x_2 = -8$,
 $x_3 = 3\sqrt{5}$ и $x_4 = -3\sqrt{5}$ — не удовлетворяют условиям.

г) $\sqrt[3]{x^3 - 5x^2 + 16x - 5} = x - 2$, $x - 5x^2 + 16x - 5 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$,
 $x^2 + 4x + 3 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = -3$.

150. а) $\sqrt{x^2 - 5} \geq 2$, $x^2 - 5 \geq 4$, $x^2 \geq 9$, $x^5 \leq -3$ или $x \geq 3$.

Ответ: $x \in (-\infty; -3] \cup [3; \infty)$.

б) $\sqrt{(x-2)(1-2x)} > -1$, $\sqrt{(x-2)(1-2x)} \geq 0$, $(x-2)(1-2x) \geq 0$,
 $x \in [0, 5; 2]$. Ответ: $x \in [0, 5; 2]$.

в) $\sqrt{x^2 - 16} \geq 1$, $x^2 - 16 \geq 1$, $x^2 \geq 16$, $x \leq -\sqrt{17}$ или $x \geq \sqrt{17}$.

Ответ: $x \in (-\infty; -\sqrt{17}] \cup [\sqrt{17}; \infty)$.

г) $(\sqrt{x} - 3)(x^2 + 1) > 0$, $x^2 + 1 > 0$, $\sqrt{x} - 3 > 0$, $\sqrt{x} - 3 > 0$,
 $\sqrt{x} > 3$, $x > 9$. Ответ: $x \in (9; \infty)$.

151. а) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} > 3$, $\sqrt{(x-3)^2} > 3$, $|x-3| > 3$, $x-3 > 3$ и

$x-3 < -3$, $x > 6$, $x < 0$. Ответ: $x \in (-\infty; 0) \cup (6; \infty)$.

б) $\frac{\sqrt{x^2 - 2x + 3}}{2x^2 + x + 1} \geq 0$, $2x^2 + x + 1 > 0$; ($D < 0$), $\sqrt{x^2 - 2x + 3} \geq 0$,
 $x^2 - 2x + 3 \geq 0$, $D < 0$, x — произвольное. Ответ: $x \in (-\infty; \infty)$.

в) $\sqrt{25 - 20x + 4x^2} \leq 1$, $\begin{cases} 25 - 20x + 4x^2 \geq 0, \\ 25 - 20x + 4x^2 \leq 1; \end{cases} \begin{cases} (5-2x)^2 \geq 0, \\ (5-2x)^2 \leq 1; \end{cases}$
 $-1 \leq 5 - 2x \leq 1$, $2 \leq x \leq 3$. Ответ: $x \in [2; 3]$.

г) $\sqrt{2x - x^2 + 15}(3x + x^2 - 4) \leq 0$, $\sqrt{2x - x^2 + 15}(-x^2 + 3x - 4) \leq 0$,
 $-x^2 + 3x - 4 < 0$; ($D < 0$), $\sqrt{2x - x^2 + 15} \geq 0$, $-x^2 + 2x + 15 \geq 0$,
 $x^2 - 2x - 15 = 0$, $x_1 = 5$, $x_2 = -3$, $x \in [-3; 5]$. Ответ: $x \in [-3; 5]$.

13. Тригонометрические уравнения и неравенства

152. а) $\cos x + 2 \cos 2x = 1$,

$$2 \cos^2 x + \cos x - 2(1 - \cos^2 x) - 1 = 0,$$

$$2 \cos^2 x + \cos x - 2 + 2 \cos^2 x - 1 = 0, \quad 4 \cos^2 x + \cos x - 3 = 0.$$

$$\cos = y, \quad 4y^2 + y - 3 = 0, \quad y_1 = -1, \quad y_2 = \frac{3}{4}; \quad \cos x_1 = -1,$$

$$\cos x_2 = \frac{3}{4}, \quad x_1 = -\pi + 2\pi n, \quad n \in Z, \quad x_2 = \pm \arccos \frac{3}{4} + 2\pi k, \quad k \in Z.$$

Ответ: $-\pi + 2\pi n, \quad n \in Z; \quad \pm \arccos \frac{3}{4} + 2\pi k, \quad k \in Z.$

б) $4 \sin 2x - 3 \sin(2x - \frac{\pi}{2}) = 5, \quad 4 \sin 2x + 3 \sin(\frac{\pi}{2} - 2x) = 5, \quad 4 \sin 2x + 3 \cos 2x = 5,$

$$8 \sin x \cdot \cos x + 3 \cos^2 x - 3 \sin^2 x - 5 \sin^2 x - 5 \cos^2 x = 0, \quad \cos \neq 0,$$

$$8 \operatorname{tg}^2 x - x 8 \operatorname{tg} x + 2 = 0, \quad \operatorname{tg} x = y, \quad 8y^2 - 8y + 2 = 0,$$

$$4y^2 - 4y + 1 = 0, \quad (2y - 1)^2 = 0, \quad 2y = 1, \quad y = \frac{1}{2}; \quad x = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi n, \quad n \in Z.$$

Ответ: $\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi n, \quad n \in Z.$

в) $2 \cos^2 x + 4 \cos x = 3 \sin^2 x, \quad 2 \cos^2 x + 4 \cos x - 3(1 - \cos^2 x) = 0,$

$$2 \cos^2 x + 3 \cos^2 x + 4 \cos x - 3 = 0, \quad 5 \cos^2 x + 4 \cos x - 3 = 0. \quad \cos x = y,$$

$$5y^2 + 4y - 3 = 0, \quad D = 16 + 60 = 76, \quad x_1 = \frac{-2 + \sqrt{19}}{5},$$

$$x_2 = \frac{-2 - \sqrt{19}}{5}, \quad \cos x = \frac{-2 + \sqrt{19}}{5}; \quad x = \pm \arccos \left(\frac{-2 + \sqrt{19}}{5} \right) + 2\pi n, \quad n \in Z;$$

$$\cos x = \frac{-2 - \sqrt{19}}{5} < -1 - \text{не имеет смысла.}$$

Ответ: $\pm \arccos \left(\frac{-2 + \sqrt{19}}{5} \right) + 2\pi n, \quad n \in Z.$

г) $\cos^2 x + 4 \sin^2 x = 2 \sin 2x, \quad \cos^2 x + 4 \sin^2 x - 4 \sin x \cdot \cos x = 0,$

$$\cos x \neq 0, \quad 1 + 4 \operatorname{tg}^2 x - 4 \operatorname{tg} x = 0, \quad 4 \operatorname{tg}^2 x - 4 \operatorname{tg} x + 1 = 0, \quad (2 \operatorname{tg} x - 1)^2 = 0,$$

$$2 \operatorname{tg} x - 1 = 0, \quad 2 \operatorname{tg} x = 0, \quad \operatorname{tg} x = \frac{1}{2}, \quad x = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi n, \quad n \in Z.$$

Ответ: $\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi n, \quad n \in Z.$

153. а) $\sin^3 x - \cos^3 x = 1 + \frac{\sin 2x}{2}$, $(\sin x - \cos x)(\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x) =$
 $= 1 + \sin x \cdot \cos x$, $(\sin x - \cos x)(1 + \sin x \cdot \cos x) - (1 + \sin x \cdot \cos x) = 0$,
 $(1 + \sin x \cdot \cos x) \cdot (\sin x - \cos x - 1) = 0$, $1 + \sin x \cdot \cos x = 0$ и
 $\sin x - \cos x - 1 = 0$, $\frac{1}{2} \sin 2x = -1$, $\sin x - \cos x = 1$, $\sin 2x = -2$ — не
имеет смысла; $\sin x = 1 + \cos x \sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cos x = 1$,
 $-2 \sin x \cos x = 0$, $\sin x = 0$ или $\cos x = 0$, $\sin x \geq 0$, $\cos x \leq 0$,
 $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

б) $\cos(\frac{\pi}{4} + x) + \cos(\frac{\pi}{4} - x) = 1$,
 $2 \cos(\frac{\pi}{4}) \cos x = 1$, $\sqrt{2} \cos x = 1$, $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$,
 $\cos(\frac{\pi}{4} - x) \geq 0$, $\sin^2(\frac{\pi}{4} - x) + \cos^2(\frac{\pi}{4} - x) + 2 \sin(\frac{\pi}{4} - x) \cos(\frac{\pi}{4} - x) = 1$,
 $x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

в) $\cos^4 x - \sin^4 x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $(\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$,
 $\cos^2 x - \sin^2 x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $2x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, $x = \pm \frac{\pi}{12} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;
г) $\sin(\frac{\pi}{6} + x) - \sin(\frac{\pi}{6} - x) = 1$, $2 \sin \frac{\frac{\pi}{6} + x - \frac{\pi}{6} + x}{2} \cdot \cos \frac{\frac{\pi}{6} + x + \frac{\pi}{6} - x}{2} = 1$,
 $2 \sin x \cdot \cos \frac{\pi}{6} = 1$, $2 \sin x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1$, $\sqrt{3} \sin x = 1$, $x = (-1)^k \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

154. а) $\cos 4x + 2 \cos^2 x = 1$, $\cos^2 2x - \sin^2 2x + 1 + \cos 2x = 1$,
 $2 \cos^2 2x - 1 + 2x + \cos 2x = 0$; $\cos 2x = y$,
 $2y^2 + y - 1 = 0$, $y_1 = -1$, $y_2 = \frac{1}{2}$; $\cos 2x = -1$ или $\cos 2x = \frac{1}{2}$,
 $2x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, $2x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;
 $x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $\pm \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$\text{б) } 4(1 + \cos x) = 3 \sin^2 \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}, \quad 4 \cdot 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 3 \sin^2 \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = 0,$$

$$\cos \frac{x}{2} (8 \cos \frac{x}{2} - 3 \sin^2 \frac{x}{2}) = 0. \quad \cos \frac{x}{2} = 0, \quad \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad x_1 = \pi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$8 \cos \frac{x}{2} - 3 + 3 \cos^2 \frac{x}{2} = 0; \quad \cos \frac{x}{2} = y,$$

$$3y^2 + 8y - 3 = 0, \quad y_1 = -3, \quad y_2 = \frac{1}{3}; \quad \cos \frac{x}{2} = -3 - \text{не имеет смысла};$$

$$\cos \frac{x}{2} = \frac{1}{3}; \quad \frac{x}{2} = \pm \arccos \frac{1}{3} + 2\pi n, \quad x = \pm 2 \arccos \frac{1}{3} + 4\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \pi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad \pm 2 \arccos \frac{1}{3} + 4\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{в) } \cos 3x + \sin x \cdot \sin 2x = 0, \quad \cos 3x + \frac{1}{2}(\cos x - \cos 3x) = 0,$$

$$\cos 3x + \frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{2} \cos 3x = 0, \quad \frac{1}{2} \cos 3x + \frac{1}{2} \cos x = 0, \quad \frac{1}{2}(\cos 3x + \cos x) = 0,$$

$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cos 2x \cdot \cos x = 0, \quad \cos 2x = 0 \quad \text{или} \quad \cos x = 0, \quad 2x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad \text{Ответ: } \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{г) } 4(1 - \cos x) = 3 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos^2 \frac{x}{2}, \quad 4 \cdot 2 \sin^2 \frac{x}{2} - 3 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos^2 \frac{x}{2} = 0,$$

$$\sin \frac{x}{2} (8 \sin \frac{x}{2} - 3 \cos^2 \frac{x}{2}) = 0.$$

$$1) \quad \sin \frac{x}{2} = 0, \quad \frac{x}{2} = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$2) \quad 8 \sin \frac{x}{2} - 3 \cos^2 \frac{x}{2} = 0, \quad 8 \sin \frac{x}{2} - 3 + 3 \sin^2 \frac{x}{2} = 0;$$

$$\sin \frac{x}{2} = y, \quad 3y^2 + 8y - 3 = 0, \quad y_1 = -3, \quad y_2 = \frac{1}{3}; \quad \sin \frac{x}{2} = -3 - \text{не имеет смысла};$$

$$\sin \frac{x}{2} = \frac{1}{3}, \quad \frac{x}{2} = (-1)^k \arcsin \frac{1}{3} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad x = 2 \cdot (-1)^k \arcsin \frac{1}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad 2 \cdot (-1)^k \arcsin \frac{1}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\mathbf{155. а) } \cos 2x - \cos 6x = 0, \quad -2 \sin \left(\frac{-4x}{2} \right) \cdot \sin \frac{8x}{2} = 0, \quad 2 \sin 2x \cdot \sin 4x = 0,$$

$$\sin 2x = 0 \quad \text{или} \quad \sin 4x = 0, \quad 2x = \pi k, \quad 4x = \pi n, \quad x = \frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad x = \frac{\pi n}{4}, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \sin x + \sin 2x + \sin 3x &= 0, \quad 2 \sin \frac{4x}{2} \cdot \cos x + \sin 2x = 0, \\ 2 \sin 2x \cdot \cos x + \sin 2x &= 0, \quad \sin 2x(2 \cos x + 1) = 0, \quad \sin 2x = 0 \text{ и} \\ 2 \cos x + 1 &= 0, \quad 2x = \pi k, \quad \cos x = -\frac{1}{2}, \quad x = \frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\begin{aligned} \text{в) } \sin x + \sin 3x &= 0, \quad 2 \sin 2x \cdot \cos x = 0, \quad \sin 2x = 0 \text{ или } \cos x = 0, \\ 2x &= \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \text{ значит, } x = \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{г) } \cos\left(\frac{\pi}{2} + 5x\right) + \sin x &= 2 \cos 3x, \quad -\sin 5x + \sin x - 2 \cos 3x = 0, \\ \sin x - \sin 5x - 2 \cos 3x &= 0, \quad -2 \sin 2x \cdot \cos 3x - 2 \cos 3x = 0, \\ -2 \cos 3x(\sin 2x + 1) &= 0, \quad \cos 3x = 0 \text{ и } \sin 2x = -1, \quad 3x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \\ n \in \mathbb{Z}, \quad 2x &= -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

$$\text{156. а) } \frac{6}{\operatorname{ctg} x + 2} = 3 - \operatorname{ctg} x; \quad \begin{cases} x \neq \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ x \neq \operatorname{arccotg}(-2) + \pi n; \end{cases} \quad 6 = 3 \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg}^2 x + 6 - 2 \operatorname{ctg} x,$$

$$\operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{ctg} x = 0, \quad \operatorname{ctg} x(\operatorname{ctg} x - 1) = 0, \quad \operatorname{ctg} x = 0 \text{ и } \operatorname{ctg} x - 1 = 0,$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad \operatorname{ctg} x = 1, \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\begin{aligned} \text{б) } 1 + 2 \cos 3x \cdot \cos x - \cos 2x &= 0, \quad 1 + \cos 2x + \cos 4x - \cos 2x = 0, \\ \cos 4x &= -1, \quad 4x = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{в) } \frac{15}{\sin x + 1} = 11 - 2 \sin x; \quad \sin x \neq -1, \quad x \neq -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$15 = 11 \sin x + 11 - 2 \sin^2 x - 2 \sin x; \quad \sin x = y,$$

$$2y^2 - 9y + 4 = 0, \quad y_1 = 4, \quad y_2 = \frac{1}{2}; \quad \sin x = 4 - \text{не имеет смысла};$$

$$\sin x = \frac{1}{2}, \quad x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad \text{Ответ: } (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{г) } \operatorname{ctgx} + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 2; \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \\ \cos x \neq -1; \end{cases} \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \\ x \neq \pi + 2\pi n, \end{cases} n \in Z;$$

$$\frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{1 + \cos x} - 2 = 0, \cos x + \cos^2 x + \sin^2 - 2 \sin x(1 + \cos x) = 0,$$

$$\cos x + 1 - 2 \sin x - 2 \sin x \cdot \cos x = 0, (\cos x + 1) - 2 \sin x(1 + \cos x) = 0,$$

$$(\cos x + 1)(1 - 2 \sin x) = 0, \cos x = -1 \text{ или } 2 \sin x = 1, x = \pi + 2\pi n, n \in Z - \text{ не}$$

$$\text{удовлетворяет условиям; } \sin x = \frac{1}{2}, x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z.$$

$$157. \text{ а) } \operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} x = 0; \begin{cases} 3x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z, \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z; \end{cases} \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z, \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z; \end{cases}$$

$$\frac{\sin 2x}{\cos 3x \cdot \cos x} = 0, \sin 2x = 0, 2x = \pi n, n \in Z, x = \frac{\pi n}{2}. \text{ Ответ: } x = \frac{\pi n}{2}, n \in Z.$$

$$\text{б) } \operatorname{tg} x - \sin x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}; x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z; \frac{\sin x}{\cos x} - \sin x = 1 - \cos x,$$

$$\sin x - \cos x \cdot \sin x - \cos x + \cos^2 x = 0,$$

$$\sin x(1 - \cos x) - \cos x(1 - \cos x) = 0, (1 - \cos x)(\sin x - \cos x) = 0,$$

$$1 - \cos x = 0 \text{ и } \sin x - \cos x = 0, \cos x = 1, x = 2\pi n, n \in Z; \text{ разделим на } \cos x \neq 0,$$

$$\operatorname{tg} x - 1 = 0, \operatorname{tg} x = 1, x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z. \text{ Ответ: } 2\pi n, n \in Z; \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z.$$

$$\text{в) } \sin x \cdot \operatorname{tg} x = \cos x + \operatorname{tg} x; x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z; \sin x \cdot \operatorname{tg} x - \cos x - \operatorname{tg} x = 0;$$

$$\frac{\sin^2 x}{\cos x} - \cos x - \frac{\sin x}{\cos x} = 0, \sin^2 x - \cos^2 x - \sin x = 0, \sin^2 x - 1 + \sin^2 x - \sin x = 0.$$

$$\sin x = y, 2y^2 - y - 1 = 0, y_1 = 1, y_2 = -\frac{1}{2}; \sin x = 1 \text{ и}$$

$$\sin x = -\frac{1}{2}; x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z - \text{ не удовлетворяет условиям;}$$

$$x = (-1)^k \left(-\frac{\pi}{6} \right) + \pi k, k \in Z.$$

$$\text{г) } \sin x + \sin 2x = \operatorname{tg} x, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z; \sin x + 2 \sin x \cos x = \frac{\sin x}{\cos x},$$

$$\sin x \cos x + 2 \sin x \cos^2 x - \sin x = 0, \sin x(\cos x + 2 \cos^2 x - 1) = 0,$$

$$\sin x = 0, x = \pi k, k \in Z;$$

$$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0; y = \cos x, 2y^2 + y - 1 = 0, D = 9,$$

$$y_1 = -1, y_2 = \frac{1}{2}, \cos x = -1, x_1 = \pi + 2\pi k, k \in Z, \cos x = \frac{1}{2},$$

$$x_2 = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z. \text{ Ответ: } x = \pi + 2\pi k, k \in Z; x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z.$$

$$158. \text{ а) } \arccos \frac{1+2x}{3} = \frac{2\pi}{3}, \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}, \text{ значит } \frac{1+2x}{3} = -\frac{1}{2},$$

$$2+4x = -3, x = -\frac{5}{4}, x = -1\frac{1}{4}.$$

$$\text{б) } \arctg(2x-1) = -\frac{\pi}{4}, \text{ так как } \tg\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1, \text{ то } 2x-1 = -1, 2x = 0, x = 0;$$

$$\text{в) } \arcsin \frac{x+2}{4} = -\frac{\pi}{3}, \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ то } \frac{x+2}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$2x+4 = -4\sqrt{3}, 2x = -4\sqrt{3}-4, x = -2\sqrt{3}-2;$$

$$\text{г) } \arctg(2-3x) = \frac{3\pi}{4}$$

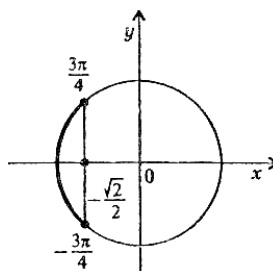
нет решений, поскольку $\frac{3\pi}{4} \notin \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

159.

$$\text{а) } \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, -\cos \leq \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Ответ: } x \in \left[-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n; \frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right], n \in Z.$$

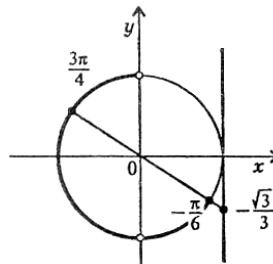


$$\text{б) } \sqrt{3}\tg\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \geq -1, \tg\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \geq -\frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$-\frac{\pi}{6} + \pi n \leq \frac{\pi}{4} - x < \frac{\pi}{2} + \pi n,$$

$$-\frac{\pi}{4} - \pi n < x \leq \frac{5\pi}{12} - \pi n, n \in Z.$$

$$\text{Ответ: } x \in \left(-\frac{\pi}{4} - \pi n; \frac{5\pi}{12} - \pi n\right], n \in Z.$$

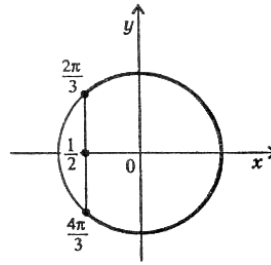


$$\text{в) } \sin 2x \cdot \sin \frac{x}{2} - \cos 2x \cdot \cos \frac{x}{2} > \frac{1}{2}, \quad -\cos(2x + \frac{x}{2}) > \frac{1}{2},$$

$$-\cos(2,5x) > \frac{1}{2}, \quad \cos 2,5x < -\frac{1}{2}.$$

$$\frac{2\pi}{3} + 2\pi n < 2,5x < \frac{4\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$\frac{4\pi}{15} + \frac{4\pi n}{5} < x < \frac{8\pi}{15} + \frac{4\pi n}{5}, \quad n \in \mathbb{Z};$$

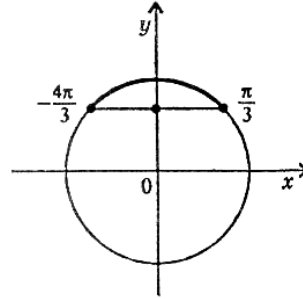


$$\text{г) } \sin 3x \cdot \cos x + \sin x \cdot \cos 3x \leq \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sin 4x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$-\frac{4\pi}{3} + 2\pi n \leq 4x \leq \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

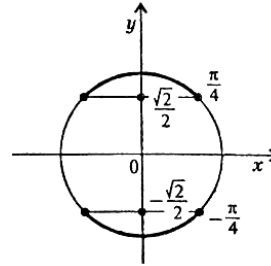
$$-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi n}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$



$$160. \text{ а) } 2\sin^2 x \leq 1, \quad \sin^2 x \leq \frac{1}{2},$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$-\frac{\pi}{4} + \pi n \leq x \leq \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

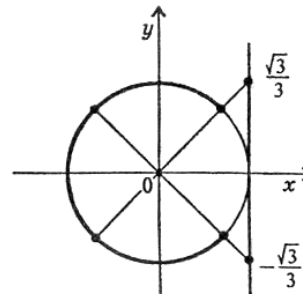


$$\text{б) } 3\text{tg}^2 2x \leq 1, \quad \text{tg}^2 2x \leq \frac{1}{3},$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{3} \leq \text{tg}^2 2x \leq \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$-\frac{\pi}{6} + \pi n \leq 2x \leq \frac{\pi}{6} + \pi n,$$

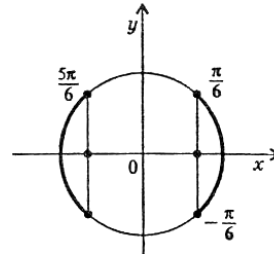
$$-\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2};$$



$$\text{в) } 4 \cos^2 x \leq 3, \cos^2 x \leq \frac{3}{4},$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\frac{\pi}{6} + \pi n \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$



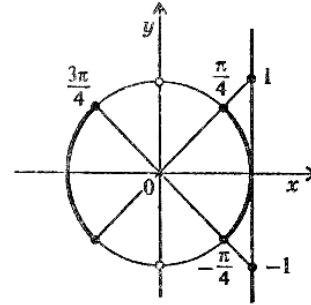
$$\text{г) } \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 1 \geq 0, \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} \geq 1, \operatorname{tg} x \leq -1 \text{ и}$$

$$\operatorname{tg} x \geq 1. \frac{\pi}{4} + \pi n \leq \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z},$$

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq x < \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\frac{\pi}{2} + \pi n < \frac{x}{2} \leq \frac{3\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z},$$

$$\pi + 2\pi n < x \leq \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$



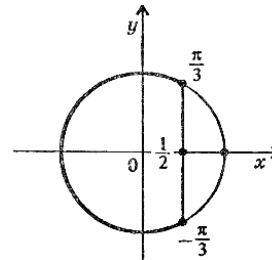
$$\text{ОТВЕТ: } x \in [\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \pi + 2\pi n) \cup (\pi + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n], n \in \mathbb{Z}.$$

161.

$$\text{а) } |\cos x - 1| \leq 0,5, -\frac{1}{2} \leq \cos x - 1 \leq \frac{1}{2},$$

$$0,5 \leq \cos x \leq 1,5, 0,5 \leq \cos x \leq 1;$$

$$-\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leq x \leq \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

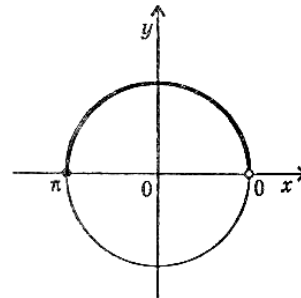


$$\text{б) } \sin x < \cos x, \sin x - \cos x < 0,$$

$$\sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4}) < 0, \sin(x - \frac{\pi}{4}) < 0;$$

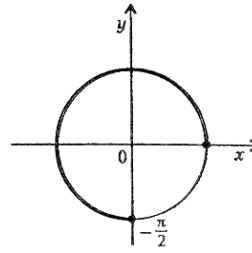
$$-\pi + 2\pi n < x - \frac{\pi}{4} < 2\pi n, n \in \mathbb{Z},$$

$$-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$



$$\begin{aligned} \text{в)} \quad & \left| \sin 2x + \frac{1}{2} \right| \leq \frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2} \leq \sin 2x + \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}, \\ & -1 \leq \sin 2x \leq 0, \quad -\pi + 2\pi n \leq 2x \leq 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ & -\frac{\pi}{2} + \pi n \leq x \leq \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

$$\text{ОТВЕТ: } x \in \left[-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right], \quad n \in \mathbb{Z}.$$



$$\text{г)} \quad \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x > 0, \quad \operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} > 0, \quad \frac{\operatorname{tg}^2 x + 1}{\operatorname{tg} x} > 0, \quad \operatorname{tg}^2 x + 1 > 0 - \text{при всех } x;$$

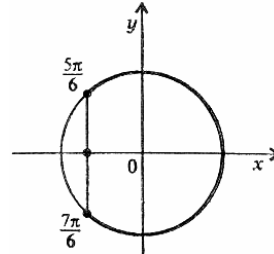
$$\operatorname{tg} x > 0, \quad \pi < x < \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad \text{ОТВЕТ: } x \in (\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$162. \text{ а)} \quad \sin x - \sqrt{3} \cos x > \sqrt{3}, \quad \frac{1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x > \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$-\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) > \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) < -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\frac{5\pi}{6} + 2\pi n < \frac{\pi}{6} + x < \frac{7\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

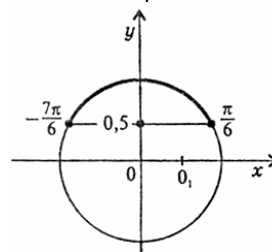
$$\frac{2\pi}{3} + 2\pi n < x < \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$



$$\text{б)} \quad \log_{0,5} \sin x > 1, \quad \log_{0,5} \sin x > \log_{0,5} 0,5;$$

$$y = \log_{0,5} t - \text{убывает, } \sin x < 0,5.$$

$$\text{ОТВЕТ: } x \in \left(-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right), \quad n \in \mathbb{Z}.$$



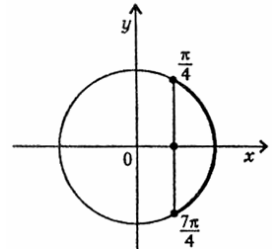
$$\text{в)} \quad \sin x + \cos x < 1,$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x < \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) < \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\frac{\pi}{4} + 2\pi n < x - \frac{\pi}{4} < \frac{7\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < 2\pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad \text{ОТВЕТ: } x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n\right), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

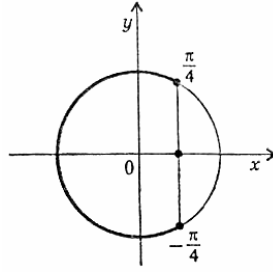


г)

$$\log_{\sqrt{2}} \cos x > -1, \log_{\sqrt{2}} \cos x > \log_{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right),$$

$$y = \log_{\sqrt{2}} t - \text{возрастает, } \cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Ответ: } x \in \left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{\pi}{4} + 2\pi n \right), n \in \mathbb{Z}.$$



14. Показательные уравнения и неравенства

163. а) $(0,2)^{x^2-16x-37,5} = 5\sqrt{5}, 5^{-x^2+16x+37,5} = 5\sqrt{5},$

$$-x^2 + 16x + 37,5 = 1,5, x^2 - 16x - 36 = 0, x_1 = 18, x_2 = -2;$$

б) $2^{x^2-3} \cdot 5^{x^2-3} = 0,01 \cdot (10^{x-1})^3, 10^{x^2-3} = 10^{-2} \cdot 10^{3x-3},$

$$10^{x^2-3} = 10^{-2+3x-3}, x^2 - 3 = 3x - 5, x^2 - 3x + 2 = 0, x_1 = 2, x_2 = 1;$$

в) $2^{x^2-6x+0,5} = \frac{1}{16\sqrt{2}}, 2^{x^2-6x+0,5} = 2^{-4,5}, x^2 - 6x + 0,5 = -4,5,$

$$x^2 - 6x + 5 = 0, x_1 = 1, x_2 = 5;$$

г) $\frac{6^{x^2}}{2^{-15}} = \frac{3^{-15}}{6^{12-12x}}, 6^{x^2} \cdot 6^{12-12x} = 2^{-15} \cdot 3^{-15}, 6^{x^2-12x+12} = 6^{-15},$

$$x^2 - 12x + 12 = -15, x^2 - 12x + 27 = 0, x_1 = 3, x_2 = 9.$$

164. а) $5^{3x} - 2 \cdot 5^{3x-1} - 3 \cdot 5^{3x-2} = 60, 5^{3x} - \frac{2}{5} \cdot 5^{3x} - \frac{3}{25} \cdot 5^{3x} = 60,$

$$5^{3x} \left(1 - \frac{2}{5} - \frac{3}{25} \right) = 60, 5^{3x} \cdot \frac{12}{25} = 60, 5^{3x} = 125, 5^{3x} = 5^3, 3x = 3, x = 1;$$

б) $4^x - 3^{x-0,5} = 3^{x-0,5} - 2^{2x-1}, 4^x - \frac{3^x}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \cdot 3^x - \frac{4^x}{2},$

$$2 \cdot \sqrt{3} \cdot 4^x - 2 \cdot 3^x = 2 \cdot 3 \cdot 3^x - 4^x \cdot \sqrt{3}, 2\sqrt{3} - 2 \left(\frac{3}{4} \right)^x = 6 \left(\frac{3}{4} \right)^x - \sqrt{3},$$

$$8 \cdot \left(\frac{3}{4} \right)^x = 3\sqrt{3}, \left(\frac{3}{4} \right)^x = \left(\frac{3}{4} \right)^{1,5}, x = 1,5;$$

в) $2^{5x-1} + 2^{5x-2} + 2^{5x-3} = 896, \frac{2^{5x}}{2} + \frac{2^{5x}}{4} + \frac{2^{5x}}{8} = 896, 2^{5x} \cdot \frac{7}{8} = 896,$

$$2^{5x} = \frac{896 \cdot 8}{7}, 2^{5x} = 1024, 2^{5x} = 2^{10}, x = 2;$$

$$\begin{aligned} \text{г)} \quad 5^{2x-1} + 2^{2x} &= 5^{2x} - 2^{2x+2}, \quad \frac{5^{2x}}{5} + 2^{2x} = 5^{2x} - 4 \cdot 2^{2x}, \\ 5^{2x} + 5 \cdot 2^{2x} &= 5 \cdot 5^{2x} - 20 \cdot 2^{2x}, \quad \left(\frac{5}{2}\right)^{2x} + 5 = 5 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{2x} - 20, \\ 4 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{2x} &= 25, \quad \left(\frac{5}{2}\right)^{2x} = \left(\frac{5}{2}\right)^2, \quad x = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{165. а)} \quad 9^{x^2-1} - 36 \cdot 3^{x^2-3} + 3 &= 0, \quad \frac{9^{x^2}}{9} - \frac{36}{27} \cdot 9^{x^2} + 3 = 0, \\ 3 \cdot 9^{x^2} - 36 \cdot 3^{x^2} + 81 &= 0. \quad \text{Пусть } 3^{x^2} = y, \quad \text{тогда } 3y^2 - 36y + 81 = 0, \\ y^2 - 12y + 27 &= 0, \quad y_1 = 3, \quad y_2 = 9; \quad 3^{x^2} = 3 \quad \text{или} \quad 3^{x^2} = 3^2, \quad x^2 = 1, \\ x^2 = 2, \quad x_1 &= 1, \quad x_2 = -1; \quad x_3 = \sqrt{2}, \quad x_4 = -\sqrt{2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б)} \quad 5^{3x+1} + 34 \cdot 5^{2x} &= 7 \cdot 5^x, \quad 5 \cdot 5^{3x} + 34 \cdot 5^{2x} - 7 \cdot 5^x = 0. \quad 5^x = y, \\ 5y^3 + 34y^2 - 7y &= 0, \quad y(5y^2 + 34y - 7) = 0, \quad y = 0 \\ 5y^2 + 34y - 7 &= 0, \quad y = -7 \quad \text{и} \quad y = \frac{1}{5}; \quad 5^{3x} = 0 - \text{нет корней}; \\ 5^{3x} &= -7 - \text{нет корней}; \quad 5^{3x} = 5^{-1}, \quad 3x = -1, \quad x = -\frac{1}{3}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{в)} \quad 16^x - 50 \cdot 2^{2x} &= 896, \quad 4^{2x} - 50 \cdot 4^x - 896 = 0; \quad 4^x = y, \\ y^2 - 50y - 896 &= 0, \quad y_1 = 64, \quad y_2 = -14; \quad 4^x = 64 \quad \text{или} \quad 4^{2x} = -14 - \text{нет корней}; \quad x = 3. \\ \text{г)} \quad 7^{4\sqrt{x}} - 8 \cdot 7^{\sqrt{4x}} + 7 &= 0, \quad 7^{4\sqrt{x}} - 8 \cdot 7^{2\sqrt{x}} + 7 = 0. \quad 7^{2\sqrt{x}} = y, \\ y^2 - 8y + 7 &= 0, \quad y_1 = 7, \quad y_2 = 1; \quad 7^{2\sqrt{x}} = 7 \quad \text{или} \quad 7^{2\sqrt{x}} = 1, \\ 2\sqrt{x} &= 1, \quad 2\sqrt{x} = 0, \quad x_1 = \frac{1}{4}; \quad x_2 = 0. \quad \text{Ответ: } 0; 0,25. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{166. а)} \quad 3 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^x &= 5 \cdot 6^x, \quad 3 \cdot 2^{2x} + 2 \cdot 3^{2x} = 5 \cdot 6^x, \quad \text{разделим обе} \\ \text{части уравнения на } 6^x &\neq 0, \quad 3 \left(\frac{2}{3}\right)^x + 2 \left(\frac{3}{2}\right)^x = 5. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{3}\right)^x &= y, \quad 3y + \frac{2}{y} - 5 = 0, \quad 3y^2 - 5y + 2 = 0, \quad y_1 = 1, \quad y_2 = \frac{2}{3}; \\ \left(\frac{2}{3}\right)^x &= 1 \quad \text{или} \quad \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{2}{3}, \quad x_1 = 0; \quad x_2 = 1; \end{aligned}$$

$$\text{б)} 8^x + 18^x = 2 \cdot 27^x, \left(\frac{8}{27}\right)^x + \left(\frac{18}{27}\right)^x = 2, \left(\frac{2}{3}\right)^{3x} + \left(\frac{2}{3}\right)^x - 2 = 0.$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = y, y^3 + y - 2 = 0, y^3 - 1 + y - 1 = 0,$$

$$(y-1)(y^2 + y + 1) + (y-1) = 0, (y-1)(y^2 + y + 1 + 1) = 0,$$

$$(y-1)(y^2 + y + 2) = 0, y = 1 \text{ или } y^2 + y + 2 = 0 - \text{нет корней}; \left(\frac{2}{3}\right)^x = 1, x = 0;$$

$$\text{в)} 2 \cdot 25^x - 5 \cdot 10^x + 2 \cdot 4^x = 0, 2 \cdot 5^{2x} - 5 \cdot 2^x \cdot 5^x + 2 \cdot 2^{2x} = 0,$$

$$2 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^x - 5 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^x + 2 = 0; \left(\frac{5}{2}\right)^x = y, 2y^2 - 5y + 2 = 0, y_1 = \frac{1}{2}; \left(\frac{5}{2}\right)^x = 2$$

$$\text{или } \left(\frac{5}{2}\right)^x = \frac{1}{2}, x = \log_{\frac{5}{2}} 2 \text{ или } x_1 = \log_{\frac{5}{2}} \frac{1}{2}, x_2 = -\log_{\frac{5}{2}} 2;$$

$$\text{г)} 3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x, 3 \cdot 2^{4x} + 2 \cdot 3^{4x} = 5 \cdot 2^{2x} \cdot 3^{2x},$$

$$3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 5 = 0, \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = y, 3y + \frac{2}{y} - 5 = 0,$$

$$3y^2 - 5y + 2 = 0, y_1 = 1, y_2 = \frac{2}{3}, \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = 1 \text{ или } \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = \frac{2}{3},$$

$$2x = 0, x = 0; 2x = 1, x = 0,5.$$

$$\mathbf{167. а)} 3^{2\sqrt{x}} + 3^{2\sqrt{x}-2} = 11, 3^{2\sqrt{x}} + \frac{3^{2\sqrt{x}}}{3} - \frac{3^{2\sqrt{x}}}{9} = 11, 3^{2\sqrt{x}} \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{9}\right) = 11,$$

$$3^{2\sqrt{x}} \cdot 1 \frac{2}{9} = 11, 3^{2\sqrt{x}} = \frac{11 \cdot 9}{11}, 3^{2\sqrt{x}} = 3^2, 2\sqrt{x} = 2, \sqrt{x} = 1, x = 1;$$

$$\text{б)} 5^{\sin^2 x} - 25^{\cos x} = 0, 5^{\sin^2 x} = 5^{2\cos x}, \sin^2 x = 2\cos x,$$

$$1 - \cos^2 x - 2\cos x = 0; \cos x = y, y^2 + 2y - 1 = 0,$$

$$y_1 = -1 - \sqrt{2}, y_2 = -1 + \sqrt{2}; \cos x = -1 - \sqrt{2} - \text{не имеет смысла};$$

$$\cos x = -1 + \sqrt{2}, x = \pm \arccos(-1 + \sqrt{2}) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\text{в)} 2^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x} = 3, 2^{\sin^2 x} + 2^{1-\sin^2 x} = 3; 2^{\sin^2 x} = y,$$

$$y + \frac{2}{y} - 3 = 0, y^2 - 3y + 2 = 0, y_1 = 1, y_2 = 2; 2^{\sin^2 x} = 1, 2^{\sin^2 x} = 2,$$

$$\sin^2 x = 0, \sin^2 x = 1, x_1 = \pi k, k \in \mathbb{Z}; \sin x = 1 \text{ или } \sin x = -1,$$

$$x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad x_3 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi l, \quad l \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad -\frac{\pi}{2} + 2\pi l, \quad l \in \mathbb{Z}.$

$$\text{г) } 3 \cdot 9^{\frac{1}{x}} + 6^{\frac{1}{x}} = 2 \cdot 4^{\frac{1}{x}}, \quad 3 \cdot 3^{\frac{2}{x}} + 3^{\frac{1}{x}} \cdot 2^{\frac{1}{x}} - 2 \cdot 2^{\frac{2}{x}} = 0,$$

$$3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} + 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}} = 0. \quad \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = y, \quad 3y + 1 - \frac{2}{y} = 0,$$

$$3y^2 + y - 2 = 0, \quad y_1 = -1, \quad y_2 = \frac{2}{3}; \quad \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = -1 - \text{не имеет смысла};$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-1}, \quad \frac{1}{x} = -1, \quad x = -1.$$

168. а) $\frac{16}{\sqrt{32}} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{3+x}, \quad \frac{2^4}{2^{\frac{5}{2}}} \geq 2^{-3-x}, \quad 2^{1,5} \geq 2^{-3-x}; \quad y = 2^t - \text{возрастает},$

$1,5 \geq -3 - x, \quad x \geq -3 - 1,5, \quad x \geq -4,5. \quad \text{Ответ: } x \in [-4,5; \infty).$

б) $3^{x^2+x} < 10^{\lg 9}, \quad 3^{x^2+x} < 9, \quad 3^{x^2+x} < 3^2; \quad y = 3^t - \text{возрастает},$

$x^2 + x < 2, \quad x^2 + x - 2 < 0, \quad (x-1)(x+2) < 0, \quad x \in (-2; 1);$

в) $3 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2-3x} < \frac{1}{9}, \quad 3 \cdot 3^{-\frac{1}{2}(2-3x)} < 3^{-2}, \quad 3^{1-\frac{3}{2}x} < 3^{-2}, \quad 3^{1,5x} < 3^{-2};$

$y = 3^t - \text{возрастает}, \quad 1,5x < -2, \quad x < -\frac{4}{3};$

г) $4^{x^2+x-11} > 5^{\log_5 4}, \quad 4^{x^2+x-11} > 4; \quad y = 4^t - \text{возрастает},$

$x^2 + x - 11 > 1, \quad x^2 + x - 12 > 0, \quad (x+4)(x-3) > 0, \quad x \in (-\infty; -4) \cup (3; \infty).$

169. а) $0,04^x - 26 \cdot 0,2^x + 25 \leq 0, \quad (0,2)^{2x} - 26 \cdot 0,2^x + 25 \leq 0;$

$0,2^x = y, \text{ то } y^2 - 26y + 25 \leq 0, \quad (y-25)(y-1) \leq 0, \quad 1 \leq y \leq 25;$

$1 \leq 0,2^x \leq 25, \quad 5^0 \leq 5^{-x} \leq 5^2; \quad y = 5^t - \text{возрастает}, \quad 0 \leq -x \leq 2.$

Ответ: $x \in [-2; 0].$

б) $9^x - 84 \cdot 3^{-2x} + \frac{1}{3} > 0, \quad 3^{2x} - 84 \cdot 3^{-2x} + \frac{1}{3} > 0. \quad 3^{2x} = y,$

$y - \frac{84}{y} + \frac{1}{3} > 0, \quad y > 0, \quad 3y^2 + y - 252 > 0,$

$3(y + \frac{28}{3})(y - 9) > 0$ $y < -\frac{28}{3}$ или $y > 9$, $3^{2x} < -\frac{28}{3}$ — не имеет смысла;

или $3^{2x} > 9$, $3^{2x} > 3^2$; $y = 3^t$ — возрастает, $2x > 2$, $x > 1$;

в) $4^x - 10 \cdot 2^x + 16 < 0$. $2^x = y$, $y > 0$, $y^2 - 10y + 16 < 0$,
 $(y - 2)(y - 8) < 0$, $2 < y < 8$, $2 < 2^x < 8$, $2^1 < 2^x < 2^3$; $y = 2^t$ — возрастает, $1 < x < 3$;

г) $2^{2x+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1} - \frac{5}{2} \geq 0$. $2^{2x+1} = y$, $y > 0$,

$y + \frac{1}{y} - \frac{5}{2} \geq 0$, $2y^2 - 5y + 2 \geq 0$, $(y - 2)(y - \frac{1}{2}) \geq 0$, $y \leq \frac{1}{2}$ или

$y \geq 2$, $2^{2x+1} \leq \frac{1}{2}$ или $2^{2x+1} \geq 2$, $2^{2x+1} \leq 2^{-1}$; $y = 2^t$ — возрастает,

$2x + 1 \leq -1$, $2x \leq -2$, $x \leq -1$; $2x + 1 \geq 1$, $2x \geq 0$, $x \geq 0$.

Ответ: $x \in (-\infty; -1] \cup [0; \infty)$.

170. а) $x^2 \cdot 3^x - 3^{x+1} \leq 0$, $3^x(x^2 - 3) \leq 0$, $3^x > 0$ при всех x , значит,

$x^2 - 3 \leq 0$, $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$. Ответ: $x \in [-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$.

б) $3,7 \frac{x^2 + 2x - 15}{x - 4} > 1$; $y = 3,7^t$ — возрастает, $\frac{x^2 + 2x - 15}{x - 4} > 0$,

$\frac{(x + 5)(x - 3)}{x - 4} > 0$, $(x + 5)(x - 3)(x - 4) > 0$. Ответ: $x \in (-5; 3) \cup (4; \infty)$.

в) $x^2 \cdot 5^x - 5^{2+x} < 0$, $5^x(x^2 - 25) < 0$, $5^x > 0$ при любых x , значит,
 $x^2 - 25 < 0$, $-5 < x < 5$;

г) $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1}$, $4 \cdot 2^x - 8 \cdot 2^x - 16 \cdot 2^x > 5 \cdot 5^x - 25 \cdot 5^x$,
 $-25 \cdot 5^x$, $-20 \cdot 2^x > -20 \cdot 5^x$, $2^x < 5^x$, разделим обе части неравенства

на $5^x > 0$. $\left(\frac{2}{5}\right)^x < 1$; $y = \left(\frac{2}{5}\right)^t$ — убывает, $x \geq 0$.

15. Логарифмические уравнения и неравенства

171. а) $\log_3^2 x = 4 - 3 \log_3 x$, $x > 0$; $\log_3 x = y$,

$y^2 + 3y - 4 = 0$, $y_1 = -4$, $y_2 = 1$; $\log_3 x = -4$ или $\log_3 x = 1$;

$x_1 = \frac{1}{81}$, $x_2 = 3$;

$$\text{б) } \frac{1}{2} \lg(2x-1) = 1 - \lg \sqrt{x-9}; \quad \begin{cases} 2x-1 > 0, \\ x-9 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x > \frac{1}{2}, \\ x > 9; \end{cases} \quad x > 9;$$

$$\frac{1}{2} \lg(2x-1) + \frac{1}{2} \lg(x-9) = 1, \quad \frac{1}{2} \lg(2x-1)(x-9) = 1, \quad \lg(2x-10)(x-9) = 2,$$

$$(2x-10)(x-9) = 100, \quad 2x^2 - 18x - 10x + 90 - 100 = 0,$$

$$2x^2 - 28x - 10 = 0, \quad x^2 - 14x - 5 = 0, \quad x_1 = 7 + 3\sqrt{6}, \quad x_2 = 7 - 3\sqrt{6} - \text{ не}$$

удовлетворяет ОДЗ. Ответ: $7 + 3\sqrt{6}$.

$$\text{в) } \log_3 \sqrt{x-5} + \log_3 \sqrt{2x-3} = 1; \quad \begin{cases} x-5 > 0, \\ 2x-3 > 0; \end{cases} \quad x > 5;$$

$$\frac{1}{2} \log_3(x-5) + \frac{1}{2} \log_3(2x-3) = 1, \quad \frac{1}{2} \log_3(x-5)(2x-3) = 1,$$

$$\log_3(x-5)(2x-3) = 2, \quad (x-5)(2x-3) = 9, \quad 2x^2 - 3x - 10x + 15 - 9 = 0,$$

$$2x^2 - 13x + 6 = 0, \quad x_1 = 6, \quad x_2 = \frac{1}{2} - \text{ не удовлетворяет ОДЗ.}$$

$$\text{г) } 3\lg^2(x-1) - 10\lg(x-1) + 3 = 0; \quad x > 1. \quad \lg(x-1) = y,$$

$$3y^2 - 10y + 3 = 0, \quad y_1 = 3, \quad y_2 = \frac{1}{3}; \quad \lg(x-1) = 3 \quad \text{или} \quad \lg(x-1) = \frac{1}{3},$$

$$x-1 = 1000, \quad x = 1001; \quad x-1 = \sqrt[3]{10}, \quad x = 1 + \sqrt[3]{10}.$$

Ответ: $1 + \sqrt[3]{10}; 1001$.

$$\mathbf{172. а) } 2 \log_5(\lg x) = \log_5(10 - 9 \lg x), \quad x > 0, \quad \lg x > 0, \quad 10 - 9 \lg x > 0, \quad \text{т.е.}$$

$$x > 1, \quad \lg x < \frac{10}{9}; \quad \log_5(\lg x)^2 = \log_5(10 - 9 \lg x), \quad (\lg x)^2 = 10 - 9 \lg x.$$

$\lg x = y, \quad y^2 + 9y - 10 = 0, \quad y = -10 \quad \text{или} \quad y = 1; \quad \lg x = -10, \quad x = 10^{-10} - \text{ не}$
удовлетворяет условиям; $\lg x = 1, \quad x = 10$.

$$\text{б) } \lg(3^x + x - 17) = x \lg 30 - x, \quad \lg(3^x + x - 17) = \lg 30^x - x,$$

$$\lg(3^x + x - 17) - \lg 30^x = -x, \quad \lg \frac{3^x + x - 17}{30^x} = \lg 10^{-x},$$

$$\frac{3^x + x - 17}{30^x} = \frac{1}{10^x}, \quad 3^x + x - 17 = 3^x, \quad x - 17 = 0, \quad x = 17.$$

$$\text{в) } 2 \lg(\lg x) = \lg(3 - 2 \lg x); \quad \begin{cases} \lg x > 0, \\ 3 - 2 \lg x > 0, \\ x > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 1, \\ x > 0, \\ \lg x < \frac{3}{2}; \end{cases}$$

$$\lg(\lg x)^2 = \lg(3 - 2\lg x), \quad (\lg x)^2 = 3 - 2\lg x. \quad \lg x = -3 \quad \text{или}$$

$\lg x = 1, x_1 = 0,001$ — не удовлетворяет ОДЗ; $x_2 = 10$.

$$\text{г) } x - x \lg 5 = \lg(2^x + x - 3), \quad x - \lg 5^x = \lg(2^x + x - 3),$$

$$x = \lg(2^x + x - 3) + \lg 5^x, \quad \lg 10^x = \lg((2^x + x - 3) \cdot 5^x),$$

$$10^x = (2^x + x - 3) 5^x, \quad 10^x = 10^x + x \cdot 5^x - 3 \cdot 5^x, \quad x \cdot 5^x - 3 \cdot 5^x = 0, \quad 5^x(x - 3) = 0, \quad 5^x > 0, \quad x = 3.$$

$$\mathbf{173. \text{ а) }} \log_2 x + \frac{4}{\log_x 2} = 5, \quad x \neq 1, \quad x > 0, \quad \log_2 x + 4 \log_2 x = 5, \quad 5 \log_2 x = 5,$$

$$\log_2 x = 1, \quad x = 2.$$

$$\text{б) } \log_3 x + \log_{\sqrt{x}} x - \log_{\frac{1}{3}} x = 6, \quad x \neq 1, \quad x > 0, \quad \log_3 x + 2 + \log_3 x = 6,$$

$$2 \log_3 x = 4, \quad \log_3 x = 2, \quad x = 9.$$

$$\text{в) } 2 \log_{\sqrt{3}} x + \log_x \frac{1}{3} = 3, \quad x \neq 1, \quad x > 0, \quad 4 \log_3 x + \frac{1}{\log_{\frac{1}{3}} x} = 3,$$

$$4 \log_3 x - \frac{1}{\log_3 x} = 3. \quad \log_3 x = y, \quad 4y - \frac{1}{y} - 3 = 0,$$

$$4y^2 - 3y - 1 = 0, \quad y_1 = 1, \quad y_2 = -\frac{1}{4}; \quad \log_3 x = 1 \quad \text{или} \quad \log_3 x = -\frac{1}{4},$$

$$x = 3; \quad x = 3^{-\frac{1}{4}}, \quad x = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}. \quad \text{Ответ: } 3; \quad \frac{1}{\sqrt[4]{3}}.$$

$$\text{г) } \log_{\sqrt{2}} x + 4 \log_{x^2} x + \log_8 x = 16, \quad 2 \log_2 x + 2 + \frac{1}{3} \log_2 x = 16, \quad x \neq 1,$$

$$x > 0, \quad 2 \frac{1}{3} \log_2 x = 14, \quad \log_2 x = \frac{14 \cdot 3}{7}, \quad \log_2 x = 6, \quad x = 2^6, \quad x = 64.$$

174. а) $x^{\log_2 x - 2} = 8, \quad x > 0, \quad x \neq 1$. Прологарифмируем обе части уравнения по основанию 2: $(\log_2 x - 2) \log_2 x = \log_2 8$,

$$\log_2^2 x - 2 \log_2 x = 3. \quad \log_2 x = y, \quad y^2 - 2y - 3 = 0,$$

$$y_1 = 3, \quad y_2 = -1; \quad \log_2 x = 3 \quad \text{или} \quad \log_2 x = -1, \quad x = 8; \quad x = \frac{1}{2}.$$

$$\text{б) } x^{\log_5 x} = 125x^2, \quad x > 0, \quad x \neq 1. \quad \log_5 x \cdot \log_5 x = \log_5 125 + 2 \log_5 x,$$

$$\log_5^2 x - 2 \log_5 x - \log_5 125 = 0. \quad \log_5 x = y, \quad y^2 - 2y - 3 = 0, \quad y_1 = 3,$$

$$y_2 = -1; \quad \log_5 x = 3 \quad \text{или} \quad \log_5 x = -1, \quad x = 125; \quad x = \frac{1}{5}.$$

$$\text{в) } x^{\lg x} = 10000, \quad x > 0;$$

$$\lg x \lg x = \lg 10000, \quad \lg^2 x = 4, \quad \lg x = 2 \quad \text{или} \quad \lg x = -2, \quad x_1 = 100, \quad x_2 = \frac{1}{100};$$

$$\text{г) } x^{\log_3 x - 3} = \frac{1}{9}, \quad x > 0, \quad x \neq 1. \quad (\log_3 x - 3) \log_3 x = \log_3 \frac{1}{9}; \quad \log_3^2 x - 3 \log_3 x = -2.$$

$$\text{Пусть } \log_3 x = 1 \quad \text{или} \quad \log_3 x = 2, \quad x_1 = 3; \quad x_2 = 9.$$

$$\mathbf{175. а) } 3 \log_2^2 \sin x + \log_2(1 - \cos 2x) = 2; \quad 3 \log_2^2 \sin x + \log_2(2 \sin^2 x) = 2,$$

$$3 \log_2^2 \sin x + \log_2 2 + 2 \log_2 \sin x = 2; \quad \log_2 \sin x = y,$$

$$3y^2 + 2y - 1 = 0, \quad y_1 = -1, \quad y_2 = \frac{1}{3}, \quad \log_2 \sin x = -1 \quad \text{или} \quad \log_2 \sin x = \frac{1}{3},$$

$$\sin x = \frac{1}{2}, \quad \sin x = \sqrt[3]{2} - \text{ не имеет смысла; } x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$\text{б) } \log_{0,1} \sin 2x + \lg \cos x = \lg 7; \quad -\lg \sin 2x + \lg \cos x = \lg 7,$$

$$\lg \frac{\cos x}{\sin 2x} = \lg 7, \quad \frac{\cos x}{\sin 2x} = 7, \quad \cos x - 7 \sin 2x = 0, \quad \cos x(1 - 14 \sin x) = 0,$$

$$\cos x = 0 - \text{ не удовлетворяет условию, } \sin x = \frac{1}{14},$$

$$x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{14} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad \text{Ответ: } (-1)^n \arcsin \frac{1}{14} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{в) } \log_7 5^{\sqrt{x+2}} = (x-4) \log_7 5; \quad \begin{cases} x+2 \geq 0, \\ x-4 \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -2, \\ x \geq 4; \end{cases} \quad x \geq 4;$$

$$\log_7 5^{\sqrt{x+2}} = \log_7 5^{x-4}, \quad 5^{\sqrt{x+2}} = 5^{x-4}, \quad \sqrt{x+2} = x-4,$$

$$x+2 = x^2 - 8x + 16, \quad x^2 - 9x + 14 = 0, \quad x_1 = 2 - \text{ не удовлетворяет условию, } x_2 = 7;$$

$$\text{г) } \lg(3 \cdot 5^x + 24 \cdot 20^x) = x + \lg 18, \quad \lg(3 \cdot 5^x + 24 \cdot 20^x) = \lg 10^x \cdot 18,$$

$$3 \cdot 5^x + 24 \cdot 20^x - 10^x \cdot 18 = 0, \quad 5^x(3 + 24 \cdot 4^x - 18 \cdot 2^x) = 0. \quad 5^x \neq 0,$$

$$24 \cdot 2^{2x} - 18 \cdot 2^x + 3 = 0. \quad 2^x = y, \quad 24y^2 - 18y + 3 = 0,$$

$$8y^2 - 6y + 1 = 0, \quad y_1 = \frac{1}{2}; \quad y_2 = \frac{1}{4}; \quad 2^x = \frac{1}{2} \quad \text{или} \quad 2^x = \frac{1}{4}, \quad x_1 = -1; \quad x_2 = -2.$$

$$\mathbf{176. а) } \log_2(x^2 - x - 4) < 3; \quad x^2 - x - 4 > 0, \quad x < \frac{1 - \sqrt{17}}{2} \quad \text{или} \quad x > \frac{1 + \sqrt{17}}{2};$$

$$\log_2(x^2 - x - 4) < \log_2 8; \quad y = \log_2 t - \text{ возрастает, } x^2 - x - 4 < 8,$$

$$x^2 - x - 12 < 0, \quad (x-4)(x+3) < 0, \quad -3 < x < 4. \quad \text{Ответ: } x \in (-3; \frac{1 - \sqrt{17}}{2}) \cup (\frac{1 + \sqrt{17}}{2}; 4).$$

$$б) \log_{\sqrt{3-1}}(5-2x) > 2; 5-2x > 0, x < 2,5; \log_{\sqrt{3-1}}(5-2x) > \log_{\sqrt{3-1}}(\sqrt{3}-1)^2;$$

$$y = \log_{\sqrt{3-1}} t - \text{убывает}, 5-2x < (\sqrt{3}-1)^2,$$

$$5-2x < 3-2\sqrt{3}+1, -2x < -1-2\sqrt{3}, x > 0,5+\sqrt{3}. \text{ Ответ: } x \in (0,5+\sqrt{3}; 2,5).$$

$$в) \lg(x^2-x+8) \geq 1; x^2-x+8 > 0 \text{ при любых } x;$$

$$\lg(x^2-x+8) \geq \lg 10; y = \lg t - \text{возрастает}, x^2-x+8 \geq 10,$$

$$(x-2)(x+1) \geq 0, x \leq -1 \text{ или } x \geq 2. \text{ Ответ: } x \in (-\infty; -1] \cup [2; \infty).$$

$$г) \log_{\sqrt{7-1}}(3-2x) < 2; 3-2x > 0; x < 1,5; \log_{\sqrt{7-1}}(3-2x) <$$

$$< \log_{\sqrt{7-1}}(\sqrt{7}-1)^2; y = \log_{\sqrt{7-1}} t - \text{возрастает}, 3-2x < (\sqrt{7}-1)^2,$$

$$3-2x < 7-2\sqrt{7}+1, -2x < 8-2\sqrt{7}-3, 2x > 2\sqrt{7}-5,$$

$$x > \sqrt{7}-2,5.$$

$$\text{Ответ: } x \in (\sqrt{7}-2,5; 1,5).$$

$$177. а) 2\log_2 x < 2 + \log_2(x+3); \begin{cases} x > 0, \\ x+3 > 0; \end{cases} x > 0; 2\log_2 x < \log_2 4 + \log_2(x+3),$$

$$\log_2 x^2 < \log_2 4(x+3); y = \log_2 t - \text{возрастает}; x^2 < 4x+12,$$

$$(x-6)(x+2) < 0, -2 < x < 6. \text{ Ответ: } (-2; 6).$$

$$б) \log_{\frac{1}{6}}(10-x) + \log_{\frac{1}{6}}(x-3) \geq -1; \begin{cases} 10-x > 0, & \begin{cases} x < 10, \\ x-3 > 0; & \begin{cases} x > 3; \end{cases} \end{cases}$$

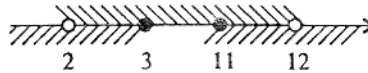
$$3 < x < 10; \log_{\frac{1}{6}}(10-x)(x-3) \geq \log_{\frac{1}{6}} 6; y = \log_{\frac{1}{6}} t - \text{убывает},$$

$$(10-x)(x-3) \leq 6, 10x-30-x^2+3x-6 \leq 0, -x^2+13x-36 \leq 0,$$

$$(x-9)(x-4) \geq 0, x \leq 4 \text{ или } x \geq 9. \text{ Ответ: } x \in (3; 4] \cup [9; 10).$$

$$в) \log_{\frac{1}{3}}(x-2) + \log_{\frac{1}{3}}(12-x) \geq -2;$$

$$\begin{cases} x > 2, \\ x < 12; \end{cases} 2 < x < 12;$$



$$\log_{\frac{1}{3}}(x-2)(12-x) \geq \log_{\frac{1}{3}} 9; y = \log_{\frac{1}{3}} t - \text{убывает},$$

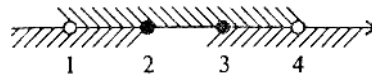
$$(x-2)(12-x) \leq 9, 12x-x^2-24+2x-9 \leq 0, x^2-14x+33 \geq 0,$$

$$(x-3)(x-11) \geq 0, x \leq 3 \text{ или } x \geq 11.$$

$$\text{Ответ: } x \in (2; 3] \cup [11; 12).$$

$$г) \log_{0,5}(4-x) \geq \log_{0,5} 2 - \log_{0,5}(x-1);$$

$$\begin{cases} 4-x > 0, \\ x-1 > 0; \end{cases} 1 < x < 4;$$



$$\log_{0,5}(4-x) + \log_{0,5}(x-1) \geq \log_{0,5}(4-x)(x-1) \geq \log_{0,5} 2;$$

$$y = \log_{0,5} t - \text{убывает, } (4-x)(x-1) \leq 2, \quad 4x - 4 - x^2 + x - 2 \leq 0,$$

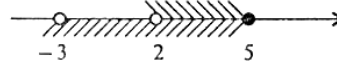
$$-x^2 + 5x - 6 \leq 0, \quad (x-3)(x-2) \geq 0, \quad x \leq 2 \text{ или } x \geq 3.$$

Ответ: $x \in (1; 2] \cup [3; 4)$.

178. а) $\lg(x^2 + x - 6) - \lg(x + 3) \leq \lg 3;$

$$\begin{cases} x^2 + x - 6 > 0, \\ x + 3 > 0; \end{cases} \begin{cases} x < -3, & \text{или} & x > 2, \\ x > -3; \end{cases} \quad x > 2;$$

$$\lg \frac{(x^2 + x - 6)}{x + 3} \leq \lg 3;$$



$$y = \lg t - \text{возрастает};$$

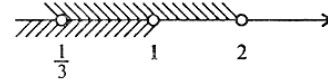
$$\frac{x^2 + x - 6}{x + 3} \leq 3, \quad \frac{x^2 + x - 6 - 3x - 9}{x + 3} \leq 0, \quad \frac{x^2 - 2x - 15}{x + 3} \leq 0,$$

$$\frac{(x-5)(x+3)}{x+3} \leq 0, \quad (x-5)(x+3)^2 \leq 0, \quad x \neq -3, \quad x \leq 5. \quad \text{Ответ: } (2; 5].$$

б) $\log_2 \frac{3x-1}{2-x} < 1; \quad \frac{3x-1}{2-x} > 0, \quad \frac{1}{3} < x < 2; \quad \log_2 \frac{3x-1}{2-x} < \log_2 2; \quad \frac{3x-1}{2-x} < 2,$

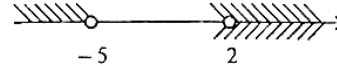
$$\frac{3x-1-4+2x}{2-x} < 0, \quad \frac{5x-5}{2-x} < 0, \quad 5(x-1)(2-x) < 0, \quad x < 1 \text{ или } x > 2.$$

Ответ: $x \in (\frac{1}{3}; 1)$.



в) $\ln(x^2 + 3x - 10) - \ln(x - 2) \geq \ln 4;$

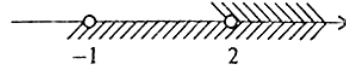
$$\begin{cases} x^2 + 3x - 10 > 0, \\ x - 2 > 0; \end{cases} \begin{cases} (x-2)(x+5) > 0, \\ x > 2; \end{cases}$$



$$y = \ln t - \text{возрастает},$$

$$\frac{x^2 + 3x - 10}{x - 2} \geq 4, \quad \frac{x^2 + 3x - 10 - 4x + 8}{(x - 2)} \geq 0, \quad \frac{x^2 - x - 2}{(x - 2)} \geq 0,$$

$$\frac{(x+1)(x-2)}{(x-2)} \geq 0,$$

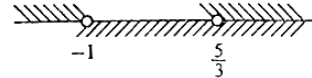


$$(x+1)(x-2)^2 \geq 0, \quad x \neq 2, \quad x > -1, \quad x \neq 2. \quad \text{Ответ: } x \in (2; \infty).$$

г) $\log_3 \frac{3x-5}{x+1} \leq 1; \quad \frac{3x-5}{x+1} > 0, \quad (3x-5)(x+1) > 0, \quad x \in (-\infty; -1) \cup (\frac{5}{3}; \infty);$

$$\log_3 \frac{3x-5}{x+1} \leq \log_3 3; \quad \frac{3x-5}{x+1} \leq 3, \quad \frac{3x-5-3x-3}{x+1} \leq 0, \quad x+1 > 0, \quad x > -1.$$

Ответ: $x \in (\frac{5}{3}; \infty)$.



179. а) $\log_2(4^x - 5 \cdot 2^x + 8) > 2$; $4^x - 5 \cdot 2^x + 8 > 0$ при любых x ;

$$\log_2(4^x - 5 \cdot 2^x + 8) > \log_2 4; 4^x - 5 \cdot 2^x + 8 > 4, 4^x - 5 \cdot 2^x + 4 > 0. 2^x = y,$$

$$y^2 - 5y + 4 > 0, (y-1)(y-4) > 0, y < 1 \text{ или } y > 4, 2^x < 1, 2^x > 4,$$

$x < 0$; $x > 2$. Ответ: $x \in (-\infty; 0) \cup (2; \infty)$.

б) $\log_{0,5}^2 x + 6 \geq 5 \log_{0,5} x, x > 0. \log_{0,5} x = y,$

$$y^2 - 5y + 6 \geq 0, (y-2)(y-3) \geq 0, y \leq 2 \text{ или } y \geq 3; \log_{0,5} x \leq 2 \text{ или}$$

$$\log_{0,5} x \geq 3; y = \log_{0,5} t - \text{убывает, } x \geq 0,25, x \leq 0,125.$$

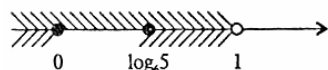
Ответ: $x \in (0; 0,125] \cup [0,25; \infty)$.

в) $\lg^2 x \geq \lg x + 2, x > 0. \lg x = y, y^2 - y - 2 \geq 0, (y+1)(y-2) \geq 0,$

$$y \leq -1 \text{ или } y \geq 2; \lg x \leq -1 \text{ или } \lg x \geq 2; x \leq \frac{1}{10}, x \geq 100.$$

г) $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(6^{x+1} - 36^x) \geq -2; 6^{x+1} - 36^x > 0, x < 1;$

$$\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(6^{x+1} - 36^x) \geq \log_{\frac{1}{\sqrt{5}}} 5; y = \log_{\frac{1}{\sqrt{5}}} t - \text{убывает,}$$



$$6^{x+1} - 36^x \leq \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{-2}, 6^{x+1} - 36^x \leq 5, -6^{2x} + 6 \cdot 6^x - 5 \leq 0.$$

$$6^x = y, y^2 - 6y + 5 \geq 0, (y-5)(y-1) \geq 0, y \leq 1 \text{ или}$$

$$y \geq 5; 6^x \leq 1 \text{ или } 6^x \geq 5, x \leq 0, x \geq \log_6 5.$$

Ответ: $x \in (-\infty; 0] \cup [\log_6 5; 1)$.

16. Системы рациональных уравнений и неравенств

180. а) $\begin{cases} 2x+3y=-1, \\ 5x+4y=1; \end{cases} \begin{cases} -8x-12y=4, \\ 15x+12y=3; \end{cases} 7x=7, x=1; 2+3y=-1, y=-1.$

б) $\begin{cases} 3x-9y=12, \\ 4x-12y=16; \end{cases} \begin{cases} x-3y=4, \\ x-3y=4. \end{cases}$

x и y – произвольные, бесконечное множество решений.

$$\text{в)} \begin{cases} x+2y=7, \\ 2x-3y=5; \end{cases} \begin{cases} -2x-4y=-14 \\ 2x-3y=5; \end{cases} \quad -7y=-9, \quad y=\frac{9}{7}; \quad x+\frac{18}{7}=7, \\ x=4\frac{3}{7}. \quad \text{Ответ: } (4\frac{3}{7}; 1\frac{2}{7}).$$

$$\text{г)} \begin{cases} 5x-8y=0, \\ x-1,6y=1; \end{cases} \begin{cases} 5(1+1,6y)-8y=0, \\ x=1+1,6y; \end{cases} \quad 5+8y-8y=0, \quad 5 \neq 0. \\ \text{не имеет решений.}$$

$$181. \text{ а)} \begin{cases} \frac{y}{x} + \frac{x}{y} = \frac{13}{6}, \\ x+y=5; \end{cases} \begin{cases} \frac{y}{5-y} + \frac{5-y}{y} = \frac{13}{6}, \\ x=5-y, \end{cases} \quad x \neq 0, \quad y \neq 0,$$

$$\frac{6y^2 + (5-y)^2 \cdot 6 - 13y(5-y)}{y(5-y) \cdot 6} = 0, \quad \frac{25y^2 - 125y + 150}{y(5-y)} = 0,$$

$$y^2 - 5y + 6 = 0, \quad y \neq 0, \quad y \neq 5; \\ y(5-y) \neq 0; \quad y_1 = 2; \quad y_2 = 3; \quad x_1 = 3; \quad x_2 = 2. \quad \text{Ответ: } (3; 2); (2; 3).$$

$$\text{б)} \begin{cases} x-y=1, \\ x^3-y^3=7; \end{cases} \begin{cases} x-y=1, \\ (x-y)(x^2+xy+y^2)=7; \end{cases} \begin{cases} x-y=1, \\ x^2+xy+y^2=7; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=1+y, \\ (1+y)^2 + (1+y)y + y^2 = 7; \end{cases} \quad 1+2y+y^2+y+y^2+y^2-7=0,$$

$$y^2+y-2=0, \quad (y-1)(y+2)=0, \quad y_1=1, \quad y_2=-2;$$

$$x_1=2, \quad x_2=-1. \quad \text{Ответ: } (2; 1); (-1; -2).$$

$$\text{в)} \begin{cases} \frac{y}{x} = 2, \\ (x-1)^2 + y^2 = 1; \end{cases} \quad x \neq 0, \quad \begin{cases} y=2x, \\ (x-1)^2 + 4x^2 = 1; \end{cases}$$

$$x^2 - 2x + 1 + 4x^2 - 1 = 0, \quad 5x^2 - 2x = 0, \quad x(5x-2) = 0, \quad ;$$

$$x_1 = 0 - \text{не удовлетворяет условию} \quad x_2 = 0,4$$

$$y = 0,8. \quad \text{Ответ: } (0,4; 0,8).$$

$$\text{г)} \begin{cases} x^3 + y^3 = 35, \\ x+y=5; \end{cases} \quad 5(x^2 - xy + y^2) = 35, \quad \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7, \\ x=5-y; \end{cases}$$

$$(5-y)^2 - (5-y)y + y^2 = 7, \quad 25 - 10y + y^2 - 5y + y^2 + y^2 = 7,$$

$$3y^2 - 15y + 18 = 0, \quad y^2 - 5y + 6 = 0, \quad y_1 = 2, \quad y_2 = 3; \quad x_1 = 3, \quad x_2 = 2.$$

$$\text{Ответ: } (3; 2); (2; 3).$$

$$182. \text{ а)} \begin{cases} (x-y)(x^2 - y^2) = 45, \\ x+y=5; \end{cases} \begin{cases} (x-y)(x-y)(x+y) = 45, \\ x+y=5; \end{cases}$$

$$5(x-y)^2 = 45, \quad (x-y)^2 = 9, \quad \begin{cases} x-y=3, \\ x+y=5 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x-y=-3, \\ x+y=5; \end{cases}$$

$$2x=8, \quad x_1=4, \quad y_1=1; \quad 2x=2, \quad x_2=1, \quad y_2=4. \quad \text{Ответ: } (4; 1); (1; 4).$$

$$\text{б) } \begin{cases} x^2 y^3 + x^3 y^2 = 12, \\ x^2 y^3 - x^3 y^2 = 4; \end{cases} \begin{cases} x^2 y^2 (y+x) = 12, \\ x^2 y^2 (y-x) = 4; \end{cases} \quad x \neq 0 \text{ и } y \neq 0. \text{ Разделим первое}$$

$$\text{уравнение на второе. } \frac{y+x}{y-x} = 3, \quad y+x = 3y-3x, \quad y = 2x;$$

$$x^2 \cdot 8x^3 + x^3 \cdot 4x^2 = 12, \quad 8x^5 + 4x^5 = 12, \quad 12x^5 = 12, \quad x = 1, \quad y = 2.$$

$$\text{в) } \begin{cases} x^2 y^3 = 16, \\ x^3 y^2 = 2; \end{cases} \quad x \neq 0, \quad y \neq 0.$$

$$\frac{y}{x} = 8, \quad y = 8x; \quad x^2 \cdot (8x)^3 = 16, \quad 2^9 \cdot x^5 = 2^4, \quad x^5 = \frac{1}{32}, \quad x = \frac{1}{2}, \quad y = 4.$$

$$\text{г) } \begin{cases} x^2 - xy = 28, \\ y^2 - xy = -12; \end{cases} \quad (x-y)^2 = 16, \quad x-y = 4 \text{ или } x-y = -4,$$

$$x = 4 + y \text{ или } x = -4 + y, \quad (4+y)^2 - (4+y) \cdot y = 28 \text{ или}$$

$$(-4+y)^2 - (-4+y)y = 28, \quad 16 + 8y + y^2 - 4y - y^2 = 28, \quad 4y = 12,$$

$$y = 3, \quad x = 7; \quad -4y = 12, \quad y = -3, \quad x = -7. \text{ Ответ: } (7; 3); (-7; -3).$$

$$\mathbf{183. а) } \begin{cases} x^3 + y^3 = 7, \\ x^3 \cdot y^3 = -8; \end{cases} \begin{cases} x^3 = 7 - y^3, \\ (7 - y^3)y^3 = -8; \end{cases} \quad 7y^3 - y^6 + 8 = 0,$$

$$y^6 - 7y^3 - 8 = 0. \quad y^3 = z, \quad z^2 - 7z - 8 = 0,$$

$$z_1 = 8, \quad z_2 = -1; \quad y^3 = 8 \text{ или } y^3 = -1, \quad y_1 = 2, \quad y_2 = -1;$$

$$x_1^3 = 7 - 8, \quad x_2^3 = 7 + 1, \quad x_1 = -1; \quad x_2 = 2. \quad \text{Ответ: } (-1; 2); (2; -1).$$

$$\text{б) } \begin{cases} x^2 + y^4 = 5, \\ xy^2 = 2; \end{cases} \begin{cases} \frac{4}{y^4} + y^4 = 5, \\ x = \frac{2}{y^2}, \\ y \neq 0; \end{cases} \quad 4 + y^8 - 5y^4 = 0. \quad y^4 = z,$$

$$z^2 - 5z + 4 = 0, \quad z_1 = 4, \quad z_2 = 1; \quad y^4 = 4, \quad y^4 = 1, \quad y_1 = \sqrt{2},$$

$$y_2 = -\sqrt{2}, \quad y_3 = 1, \quad y_4 = -1; \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 2, \quad x_4 = 2.$$

$$\text{Ответ: } (1; \sqrt{2}); (1; -\sqrt{2}); (2; 1); (2; -1).$$

$$\text{в) } \begin{cases} x^3 + y^3 = 9, \\ xy = 2; \end{cases} \begin{cases} \frac{8}{y^3} + y^3 = 9, \\ x = \frac{2}{y}, \\ y \neq 0; \end{cases} \quad 8 + y^6 - 9y^3 = 0. \quad y^3 = z,$$

$$z^2 - 9z + 8 = 0, \quad z_1 = 8, \quad z_2 = 1; \quad y_1^3 = 8, \quad y_2^3 = 1, \quad y_1 = 2, \quad y_2 = 1;$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2.$$

Ответ: (1; 2); (2; 1).

$$\text{г) } \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5, \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 13; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{x} = 5 - \frac{1}{y}, \\ \left(5 - \frac{1}{y}\right)^2 + \frac{1}{y^2} = 13, \quad 25 - \frac{10}{y} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{y^2} = 13, \\ x \neq 0, y \neq 0; \end{cases}$$

$$\frac{2}{y^2} - \frac{10}{y} + 12 = 0; \quad \frac{1}{y} = z,$$

$$z^2 - 5z + 6 = 0, \quad z_1 = 2, \quad z_2 = 3; \quad y_1 = \frac{1}{2}, \quad y_2 = \frac{1}{3}, \quad x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{1}{3}.$$

Ответ: $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right); \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$.

$$184. \text{ а) } \begin{cases} x - 5y = 7, \\ ax - y = -3; \end{cases} \quad \begin{cases} x - 5y = 7, \\ -5ax + 5y = 15; \end{cases} \quad x - 5ax = 22, \quad x(1 - 5a) = 22;$$

при $a \neq \frac{1}{5} - 1$ решение; при $a = \frac{1}{5} - 1$ нет решений;

$$\text{б) } \begin{cases} x + 2y = a, \\ 2x + 4y = 5; \end{cases} \quad \text{если } a = 2,5 - \text{бесконечное множество решений};$$

если $a \neq 2,5$ - нет решений;

$$\text{в) } \begin{cases} x + ay = 2, \\ 3x - 2y = -6; \end{cases} \quad \begin{cases} -3x - 3ay = -6, \\ 3x - 2y = -6; \end{cases} \quad -3ay - 2y = 0, \quad y(3a + 2) = 12;$$

если $a = -\frac{2}{3}$ - бесконечное множество решений; если $a \neq -\frac{2}{3}$ - одно решение;

$$\text{г) } \begin{cases} x - y = 2, \\ 2x - 2y = 2a; \end{cases} \quad \text{при } a = 2 - \text{бесконечно много решений};$$

при $a \neq \frac{1}{2}$ - нет решений.

185.

$$\text{а) } \begin{cases} 2x > 3 - \frac{13x - 2}{11}, \\ \frac{x}{6} + \frac{2}{3}(x - 7) < \frac{3x - 20}{9}; \end{cases} \quad \begin{cases} 22x > 33 - 13x + 2, \\ 3x + 12(x - 7) < 2(3x - 20); \end{cases}$$

$$\begin{cases} 35x > 35, \\ 9x < 44; \end{cases} \begin{cases} x > 1, \\ x < \frac{44}{9}. \end{cases}$$



Ответ: $x \in (1; 4\frac{8}{9})$.

$$\text{б) } \begin{cases} x - \frac{x+1}{2} - \frac{x+4}{3} \leq \frac{x-1}{4} - 2, \\ 1,5x - 2,5 < x; \end{cases} \begin{cases} 12x - 6(x+1) - 4(x+4) \leq 3(x-1) - 24, \\ 1,5x - x < 2,5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12x - 6x - 6 - 4x - 16 \leq 3x - 3 - 24, \\ 0,5x < 2,5; \end{cases} \begin{cases} -x \leq -5, \\ x < 5; \end{cases} \begin{cases} x \geq 5, \\ x < 5. \end{cases}$$

Ответ: нет решений.

$$\text{в) } \begin{cases} \frac{x+1}{2} - \frac{x}{3} \geq \frac{x-1}{4} - x - 2, \\ 0,5x < 2 - x; \end{cases} \begin{cases} 6(x+1) - 4x \geq 3(x-1) - 12x - 24, \\ 0,5x + x < 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x + 6 - 4x \geq 3x - 3 - 12x - 24, \\ 1,5x < 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 11x \geq -33, \\ x < \frac{20}{15}; \end{cases} \begin{cases} x \geq -3, \\ x < \frac{4}{3}. \end{cases}$$



Ответ: $x \in [-3; 1\frac{1}{3})$.

$$\text{г) } \begin{cases} 2(3x-1) < 3(4x+1)+16, \\ 4(2+x) < 3x+8; \end{cases} \begin{cases} 6x-2 < 12x+3+16, \\ 8+4x < 3x+8; \end{cases} \begin{cases} -6x < 21, \\ x < 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > -3,5, \\ x < 0. \end{cases} \quad \text{Ответ: } x \in (-3,5; 0).$$

17. Системы иррациональных уравнений

$$\text{186. а) } \begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 4, \\ 2\sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 18; \end{cases} \begin{cases} -2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} = -8, \\ 2\sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 18. \end{cases} \quad 5\sqrt{y} = 10, \quad \sqrt{y} = 2, \quad y = 4,$$

$$\sqrt{x} - 2 = 4, \quad \sqrt{x} = 6, \quad x = 36. \quad \text{Ответ: } (36; 4).$$

$$\text{б) } \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 8, \\ \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = 15; \end{cases} \begin{cases} \sqrt{x} = 8 - \sqrt{y}, \\ (8 - \sqrt{y})\sqrt{y} = 15; \end{cases} \quad 8\sqrt{y} - y - 15 = 0.$$

$$\sqrt{y} = z, \quad z^2 - 8z + 15 = 0, \quad z_1 = 3, \quad z_2 = 5,$$

$$\sqrt{y_1} = 3, \quad \sqrt{y_2} = 5, \quad y_1 = 9, \quad y_2 = 25, \quad \sqrt{x_1} = 8 - 3, \quad \sqrt{x_2} = 8 - 5,$$

$$x_1 = 25, \quad x_2 = 9.$$

Ответ: (25; 9); (9; 25).

$$\text{в) } \begin{cases} 3\sqrt{x} - \sqrt{y} = 8, \\ \sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 19; \end{cases} \begin{cases} 6\sqrt{x} - 2\sqrt{y} = 16, \\ \sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 19. \end{cases} \quad 7\sqrt{x} = 35, \quad x = 25,$$

$$5 + 2\sqrt{y} = 19, \quad 2\sqrt{y} = 14, \quad \sqrt{y} = 7, \quad y = 49. \quad \text{Ответ: } (25; 49).$$

$$\text{г) } \begin{cases} \sqrt{xy} = 12, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 7; \end{cases} \begin{cases} \sqrt{x} = \frac{12}{\sqrt{y}}, \\ \frac{12}{\sqrt{y}} + \sqrt{y} - 7 = 0. \end{cases} \quad \sqrt{y} = z,$$

$$\frac{12}{z} + z - 7 = 0, \quad 12 + z^2 - 7z = 0, \quad z_1 = 3, \quad z_2 = 4, \quad \sqrt{y_1} = 3, \quad \sqrt{y_2} = 4,$$

$$y_1 = 9, \quad y_2 = 16, \quad \sqrt{x_1} = 7 - 3, \quad \sqrt{x_2} = 7 - 4, \quad \sqrt{x_1} = 4, \quad \sqrt{x_2} = 3, \quad x_1 = 16, \quad x_2 = 9.$$

187.

$$\text{а) } \begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 30, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5; \end{cases} \begin{cases} \sqrt{xy}(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = 30, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5; \end{cases} \quad \sqrt{xy} \cdot 5 = 30, \quad \sqrt{xy} = 6,$$

$$\sqrt{x} = \frac{6}{\sqrt{y}}, \quad y \neq 0, \quad \sqrt{y} + \frac{6}{\sqrt{y}} - 5 = 0. \quad \sqrt{y} = z,$$

$$z^2 - 5z + 6 = 0, \quad z_1 = 2, \quad z_2 = 3, \quad \sqrt{y_1} = 2, \quad \sqrt{y_2} = 3, \quad y_1 = 4, \quad y_2 = 9,$$

$$\sqrt{x_1} = 5 - 2, \quad x_1 = 9, \quad \sqrt{x_2} = 5 - 3, \quad x_2 = 4. \quad \text{Ответ: } (4; 9), (9; 4).$$

$$\text{б) } \begin{cases} x + y - \sqrt{xy} = 7, \\ xy = 9; \end{cases} \begin{cases} x + y - \sqrt{xy} = 7 \\ \sqrt{xy} = 3; \end{cases} \begin{cases} x + y = 7 + 3, \\ xy = 9; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 10 - y, \\ (10 - y)y - 9 = 0; \end{cases} \quad y^2 - 10y + 9 = 0, \quad \begin{cases} y_1 = 9, \\ x_1 = 1; \end{cases} \begin{cases} y_2 = 1, \\ x_2 = 9. \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 6, \\ x - y = 12; \end{cases} \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 6, \\ (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = 12; \end{cases} \begin{cases} (\sqrt{x} - \sqrt{y}) \cdot 6 = 12, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 6; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 2, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 6; \end{cases} \quad 2\sqrt{x} = 8, \quad \sqrt{x} = 4, \quad x = 16, \quad 4 + \sqrt{y} = 6, \quad \sqrt{y} = 2, \quad y = 4.$$

$$\text{г) } \begin{cases} xy = 64, \\ x - y + \sqrt{xy} = 20; \end{cases} \begin{cases} \sqrt{xy} = 8, \\ x - y + 8 = 20; \end{cases} \begin{cases} (12 + y)y = 64, \\ x = 12 + y; \end{cases}$$

$$12y + y^2 - 64 = 0, \quad \begin{cases} y_1 = 4, \\ x_1 = 16; \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y_2 = -16, \\ x_2 = -4. \end{cases}$$

$$188. \text{ а) } \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 26, \\ \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 6. \end{cases} \quad \sqrt[4]{x} = u, \quad \sqrt[4]{y} = v, \quad \begin{cases} u^2 + v^2 = 26, \\ u + v = 6; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (6-v)^2 + v^2 = 26, \\ u = 6-v; \end{cases} \quad 36 - 12v + v^2 + v^2 = 26,$$

$$v^2 - 6v + 5 = 0, \quad \begin{cases} v_1 = 1, \\ u_1 = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} v_2 = 5, \\ u_2 = 1; \end{cases} \quad \sqrt[4]{x_1} = 5, \quad \sqrt[4]{x_2} = 1, \quad x_1 = 625, \quad x_2 = 1,$$

$$\sqrt[4]{y_1} = 1, \quad \sqrt[4]{y_2} = 5, \quad y_1 = 1, \quad y_2 = 625. \quad \text{Ответ: } (625; 1), (1; 625).$$

$$\text{б) } \begin{cases} \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 3\frac{3}{4}, \\ xy = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[3]{y}} - \sqrt[3]{y} - \frac{15}{4} = 0, \\ x = \frac{1}{y}, \\ y \neq 0. \end{cases} \quad \sqrt[3]{y} = z,$$

$$\frac{1}{z} - z - \frac{15}{4} = 0, \quad 4z^2 - 15z + 4 = 0, \quad z_1 = -4, \quad z_2 = \frac{1}{4}, \quad \sqrt[3]{y_1} = -4, \quad \sqrt[3]{y_2} = \frac{1}{4},$$

$$\begin{cases} y_1 = -64, \\ x_1 = -\frac{1}{64}; \end{cases} \quad \begin{cases} y_2 = -\frac{1}{64}, \\ x_2 = -64. \end{cases} \quad \text{Ответ: } \left(-\frac{1}{64}; -64\right), \left(\frac{1}{64}; 64\right).$$

$$\text{в) } \begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 5, \\ \sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y} = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} (\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y})(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y}) = 5, \\ \sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y} = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 5, \\ \sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y} = 1; \end{cases} \quad \sqrt[4]{x} = a,$$

$$\sqrt[4]{y} = b; \quad \begin{cases} a + b = 5, \\ a - b = 1; \end{cases} \quad a = 3, \quad b = 2. \quad \sqrt[4]{x} = 3, \quad x = 81; \quad \sqrt[4]{y} = 2, \quad y = 16.$$

$$\text{Ответ: } (81; 16).$$

$$\text{г) } \begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = -3, \\ xy = 8; \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = -3, \\ \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y} = 2. \end{cases} \quad \text{Пусть } \sqrt[3]{x} = a, \quad \sqrt[3]{y} = b;$$

$$\begin{cases} a + b = -3, \\ ab = 2. \end{cases} \quad \begin{cases} a = -b - 3, \\ (-b - 3)b = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} -b^2 - 3b - 2 = 0, \\ b^2 + 3b + 2 = 0, \end{cases}$$

$$\sqrt[3]{y} = -1, \quad y = (-1)^3, \quad y = -1, \quad \sqrt[3]{x} = -2, \quad x = (-2)^3, \quad x = -8;$$

$$\sqrt[3]{y} = -2, \quad y = -8, \quad \sqrt[3]{x} = -1, \quad x = -1. \quad \text{Ответ: } (-8; -1), (-1; -8).$$

18. Системы тригонометрических уравнений

189. а) $\begin{cases} \sin x \cdot \cos y = 0,25, \\ \sin y \cdot \cos x = 0,75. \end{cases}$

Сложим уравнения, затем вычтем из первого второе уравнение:

$$\begin{cases} \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y = 1, \\ \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y = -\frac{1}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} \sin(x+y) = 1, \\ \sin(x-y) = -\frac{1}{2}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z, \\ x-y = (-1)^k \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi k, \quad k \in Z; \end{cases} \quad 2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n + (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in Z, \quad n \in Z,$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n + (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, \quad k \in Z, \quad n \in Z,$$

$$2y = \frac{\pi}{2} + 2\pi n - (-1)^k \frac{\pi}{6} - \pi k, \quad k \in Z, \quad n \in Z,$$

$$y = \frac{\pi}{4} + \pi n - (-1)^k \frac{\pi}{12} - \frac{\pi k}{2}, \quad k \in Z, \quad n \in Z.$$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{4} + \pi n + (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}; \frac{\pi}{4} + \pi n + (-1)^{k+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2} \right), k \in Z, \quad n \in Z.$

б) $\begin{cases} x-y = -\frac{1}{3}, \\ \cos^2(\pi x) - \cos^2(\pi y) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x-y = -\frac{1}{3}, \\ ((\cos \pi x - \cos \pi y)(\cos \pi x + \cos \pi y)) = 0; \end{cases}$

$$-2 \sin \frac{\pi x + \pi y}{2} \cdot \sin \frac{\pi x - \pi y}{2} \cdot 2 \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \cdot \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} = 0,$$

$$\sin \pi(x+y) \sin \pi(x-y) = 0,$$

$$\sin \frac{\pi x + \pi y}{2} = 0, \text{ или } \sin \frac{\pi x - \pi y}{2} = 0, \text{ или } \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} = 0, \text{ или}$$

$$\cos \frac{\pi x - \pi y}{2} = 0; \quad \frac{\pi x + \pi y}{2} = \pi m, \quad m \in Z, \quad \frac{\pi x - \pi y}{2} = \pi k, \quad k \in Z,$$

$$\frac{\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi l, \quad l \in Z, \quad \frac{\pi x - \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z.$$

1) $\begin{cases} x+y = 2m, \quad m \in Z, \\ x-y = -\frac{1}{3}; \end{cases} \quad 2x = 2m - \frac{1}{3}, \quad x = m - \frac{1}{6}, \quad y = m + \frac{1}{6}, \quad m \in Z;$

$$2) \begin{cases} x-y=2k, & k \in Z, \\ x-y=-\frac{1}{3}; \end{cases} \quad k=-\frac{1}{6}, \text{ решений нет;}$$

$$3) \begin{cases} x+y=1+2l, & l \in Z, \\ x-y=-\frac{1}{3}; \end{cases} \quad 2x=\frac{2}{3}+2l, \quad x=\frac{1}{3}+l, \quad y=\frac{2}{3}+l, \quad l \in Z;$$

$$4) \begin{cases} x-y=1+2n, & n \in Z, \\ x-y=-\frac{1}{3}; \end{cases} \quad n=-\frac{2}{3}, \text{ нет решений.}$$

$$\text{Ответ: } \left(m-\frac{1}{6}; m+\frac{1}{6}\right), \left(\frac{1}{3}+l; \frac{2}{3}+l\right), \quad l \in Z; \quad m \in Z.$$

$$в) \begin{cases} 4 \sin x \cdot \sin y = 3, \\ \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} \sin x \cdot \sin y = \frac{3}{4}, \\ \frac{\sin x \cdot \sin y}{\cos x \cdot \cos y} = 3; \end{cases} \quad \frac{\frac{3}{4}}{\cos x \cdot \cos y} = 3,$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{4}, \quad \begin{cases} \sin x \cdot \sin y = \frac{3}{4}, \\ \cos x \cdot \cos y = \frac{1}{4}; \end{cases} \quad \sin x \cdot \sin y + \cos x \cdot \cos y = 1, \quad \cos(x-y) = 1,$$

$$\sin x \cdot \sin y - \cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}, \quad -\cos(x+y) = \frac{1}{2},$$

$$\cos(x+y) = -\frac{1}{2}, \quad x+y = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in Z; \quad \begin{cases} x-y = 2\pi n, & n \in Z, \\ x+y = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, & k \in Z; \end{cases}$$

$$2x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n + 2\pi k, \quad k \in Z, \quad n \in Z, \quad x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n + \pi k, \quad k \in Z, \quad n \in Z,$$

$$y = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n + \pi k - 2\pi n, \quad k \in Z, \quad n \in Z, \quad y = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k - \pi n, \quad k \in Z, \quad n \in Z.$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{\pi}{3} + \pi k + \pi n; \frac{\pi}{3} + \pi k - \pi n\right), \left(-\frac{\pi}{3} + \pi k + \pi n; -\frac{\pi}{3} + \pi k - \pi n\right), \quad k \in Z, \quad n \in Z.$$

$$г) \begin{cases} \sin^2 x = \cos x \cdot \cos y, \\ \cos^2 x = \sin x \cdot \sin y; \end{cases} \quad 1 = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y, \quad \cos(x-y) = 1,$$

$$x-y = 2\pi n, \quad n \in Z, \quad x = 2\pi n + y, \quad n \in Z; \quad \sin^2(2\pi n + y) =$$

$$= \cos(2\pi n + y) \cdot \cos y, \quad n \in Z, \quad \sin^2 y = \cos^2 y, \quad \sin^2 y - \cos^2 y = 0,$$

$$\operatorname{tg}^2 y = 1, \quad \cos y \neq 0, \quad y = \pm \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in Z, \quad \operatorname{tg} y = \pm 1, \quad x = 2\pi n \pm \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in Z.$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{\pi}{4} + \pi k + 2\pi n; \frac{\pi}{4} + \pi k\right), \left(-\frac{\pi}{4} + \pi k + 2\pi n; -\frac{\pi}{4} + \pi k\right), \quad k \in Z, \quad n \in Z.$$

$$190. \text{ а) } \begin{cases} tgx + tgy = 2, \\ \cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cdot \cos y} = 2, \\ \cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Перемножив уравнения, получим:

$$\begin{cases} \sin(x+y) = 1, \\ \cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}; \end{cases} \quad x+y = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z,$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n - y, \quad n \in Z, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n - y\right) \cdot \cos y = \frac{1}{2}, \quad n \in Z,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) \cdot \cos y = \frac{1}{2}, \quad \sin y \cdot \cos y = \frac{1}{2},$$

$$\sin 2y = 1, \quad 2y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in Z, \quad y = \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in Z,$$

$$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n - \pi k, \quad k \in Z, \quad n \in Z.$$

$$\text{б) } \begin{cases} x+y = \frac{5\pi}{2}, \\ \sin x + \cos 2y = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{5\pi}{2} - y, \\ \sin\left(\frac{5\pi}{2} - y\right) + \cos 2y = -1; \end{cases}$$

$$\cos y + \cos 2y = -1, \quad \cos y + 2\cos^2 y - 1 = -1, \quad 2\cos^2 y + \cos y = 0,$$

$$\cos y(2\cos y + 1) = 0, \quad \cos y = 0 \quad \text{или} \quad \cos y = -\frac{1}{2},$$

$$y_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z, \quad y_2 = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in Z, \quad y_3 = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in Z;$$

$$x_1 = \frac{5\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \pi n, \quad n \in Z, \quad x_1 = \pi n, \quad n \in Z,$$

$$x_2 = \frac{11\pi}{6} - 2\pi k, \quad k \in Z, \quad x_3 = \frac{19\pi}{6} - 2\pi k, \quad k \in Z.$$

$$\text{Ответ: } (\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n), (\frac{11\pi}{6} - 2\pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k), (\frac{19\pi}{6} - 2\pi k; -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k), \quad k \in Z, n \in Z.$$

$$\text{в) } \begin{cases} \sin x \cdot \sin y = \frac{1}{4}, \\ \operatorname{ctgx} \cdot \operatorname{ctgy} = 3. \end{cases} \quad \text{Перемножим уравнения:}$$

$$\begin{cases} \sin x \cdot \sin y = \frac{1}{4}, \\ \operatorname{cos} x \cdot \operatorname{cos} y = \frac{3}{4}; \end{cases} \quad \sin x \cdot \sin y + \operatorname{cos} x \cdot \operatorname{cos} y = 1, \quad \cos(x-y) = 1,$$

$$x - y = 2\pi n, \quad n \in Z, \quad x = 2\pi n + y, \quad n \in Z,$$

$$\sin(2\pi n + y) \cdot \sin y = \frac{1}{4}, \quad n \in Z, \quad \sin y \cdot \sin y = \frac{1}{4}, \quad \sin^2 y = \frac{1}{4},$$

$$\sin y = \pm \frac{1}{2}, \quad y = (-1)^k \left(\pm \frac{\pi}{6} \right) + \pi k, \quad k \in Z,$$

$$x = 2\pi n + (-1)^k \left(\pm \frac{\pi}{6} \right) + \pi k, \quad k \in Z, \quad n \in Z.$$

$$\text{Ответ: } ((-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k + 2\pi n; (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k), ((-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k + 2\pi n;$$

$$(-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k) \quad k \in Z, \quad n \in Z.$$

$$\Gamma) \begin{cases} \cos 2y + \cos x = 1, \\ x + y = \frac{\pi}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} \cos 2y + \cos \left(\frac{\pi}{2} - y \right) = 1, \\ x = \frac{\pi}{2} - y; \end{cases}$$

$$\cos 2y + \sin y = 1, \quad 1 - 2\sin^2 y + \sin y = 1,$$

$$-2\sin^2 y + \sin y = 0, \quad \sin y(-2\sin y + 1) = 0, \quad \sin y = 0 \quad \text{или} \quad \sin y = \frac{1}{2},$$

$$y_1 = \pi n, \quad n \in Z, \quad y_2 = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad k \in Z; \quad x_1 = \frac{\pi}{2} - \pi n, \quad n \in Z,$$

$$x_2 = \frac{\pi}{2} - (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in Z.$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{\pi}{2} - \pi n; \pi n \right), \left(\frac{\pi}{2} - (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k; (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k \right), \quad n \in Z, \quad k \in Z.$$

19. Системы показательных и логарифмических уравнений

$$191. \text{ а) } \begin{cases} 9^{x+y} = 729, \\ 3^{x-y-1} = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 9^{x+y} = 9^3, \\ 3^{x-y-1} = 3^0; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 3, \\ x - y - 1 = 0; \end{cases} \quad 2x = 4, \quad x = 2, \quad y = 1.$$

$$\text{б) } \begin{cases} 2^x - 2^y = 16, \\ x + y = 9; \end{cases} \quad \begin{cases} 2^{9-y} - 2^y = 16, \\ x = 9 - y; \end{cases} \quad \frac{2^9}{2^y} - 2^y - 16 = 0.$$

$$2^y = z, \quad \frac{512}{z} - z - 16 = 0, \quad 512 - z^2 - 16z = 0,$$

$$z^2 + 16z - 512 = 0, \quad z_1 = 16, \quad z_2 = -32; \quad 2^{y_1} = 16, \quad 2^{y_2} = -32 - \text{решений нет.}$$

$$y = 4, \quad x = 5;$$

$$\text{Ответ: } (5; 4).$$

$$\text{в)} \begin{cases} (\sqrt{5})^{x-y} = 25, \\ 6^{6y-x-1} = 1; \end{cases} \begin{cases} 5^{\frac{x-y}{2}} = 5^2 \\ 6^{6y-x-1} = 6^0; \end{cases} \begin{cases} \frac{x-y}{2} = 2, \\ 6y-x-1=0; \end{cases} \begin{cases} x-y=4, \\ -x+6y=1; \end{cases}$$

$$5y = 5, y = 1, x = 5. \quad \text{Ответ: } (5; 1).$$

$$\text{г)} \begin{cases} 3^x + 3^y = 28, \\ x-y=3; \end{cases} \begin{cases} 3^{3+y} + 3^y = 28, \\ x=3+y; \end{cases} 27 \cdot 3^y + 3^y = 28, 28 \cdot 3^y = 28,$$

$$y = 0, x = 3. \quad \text{Ответ: } (3; 0).$$

$$\text{192. а)} \begin{cases} 4^{\log_4 2x} - y = -1 \\ 5^{2x-y} + 5^x = 5,2; \end{cases} \begin{cases} 2x-y = -1, \\ 5^{-1} + 5^x = 5,2; \end{cases} \begin{cases} y = 2x+1, \\ 5^x = 5; \end{cases} \begin{cases} y = 3, \\ x = 1. \end{cases}$$

$$\text{б)} \begin{cases} 2^x + 3^y = 17 \\ 2^{x+2} + 3^{y+1} = 5; \end{cases} \begin{cases} 2^x + 3^y = 17, \\ 4 \cdot 2^x - 3 \cdot 3^y = 5. \end{cases} 2^x = u, 3^y = v,$$

$$\begin{cases} u+v=17, \\ 4u-3v=5; \end{cases} \begin{cases} -4u-4v=-68, \\ 4u-3v=5; \end{cases} -7v=-63, v=9, u=8; 2^x=8,$$

$$3^y = 9; x = 3, y = 2.$$

$$\text{в)} \begin{cases} 3^{\log_3(y+x)} = 2, \\ 2^{2x+y} = 16; \end{cases} \begin{cases} y+x=2, \\ 2x+y=4; \end{cases} \begin{cases} x+y=2, \\ 2x+y=4; \end{cases} x=2, y=0.$$

$$\text{г)} \begin{cases} \log \sqrt{2}(y-x) = 4, \\ 3^x + 2 \cdot 3^{y-2} = 171; \end{cases} \begin{cases} 3^x + 2 \cdot 3^{4+x-2} = 171, \\ y = 4+x; \end{cases}$$

$$3^x + 2 \cdot 3^{4+x-2} = 171, 3^x + 18 \cdot 3^x = 171, 19 \cdot 3^x = 171, 3^x = 9, x = 2, y = 6.$$

$$\text{193. а)} \begin{cases} 3^x \cdot 7^y = 63, \\ 3^x + 7^y = 16. \end{cases} 3^x = u; 7^y = v, \begin{cases} u \cdot v = 63, \\ u + v = 16; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (16-v)v = 63, \\ u = 16-v; \end{cases} 16v - v^2 - 63 = 0, v^2 - 16v + 63 = 0, v_1 = 7, v_2 = 9;$$

$$u_1 = 9, u_2 = 7; 3^{x^1} = 9, 3^{x^2} = 7; x_1 = 2, x_2 = \log_3 7; 7^{y^1} = 7, 7^{y^2} = 9;$$

$$y_1 = 1, y_2 = \log_7 9. \quad \text{Ответ: } (2; 1); (\log_3 7; \log_7 9).$$

$$\text{б)} \begin{cases} 3^x - 2^{2y} = 77, \\ \sqrt{3^x} - 2^y = 7; \end{cases} \begin{cases} 3^x - 2^{2y} = 77, \\ \frac{x}{3^2} - 2^y = 7. \end{cases} \frac{x}{3^2} = u, 2^y = v,$$

$$\begin{cases} u^2 - v^2 = 77, \\ u-v=7; \end{cases} \begin{cases} 7(u+v) = 77, \\ u-v=7; \end{cases} \begin{cases} u+v=11, \\ u-v=7; \end{cases} u=9, v=2;$$

$$\frac{x}{3^2} = 9, \frac{x}{2} = 2, x = 4, 2^y = 2; y = 1.$$

$$\text{Ответ: } (4; 1).$$

$$\text{в)} \begin{cases} 4^x \cdot 4^y = 64, \\ 4^x - 4^y = 63. \end{cases} \quad 4^x = u, \quad 4^y = v, \quad \begin{cases} u \cdot v = 64, \\ u - v = 63; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (63+v)v = 64, \\ u = 63+v; \end{cases} \quad v^2 + 63v - 64 = 0, \quad v_1 = -64, \quad v_2 = 1; \quad u_1 = -1, \quad u_2 = 64;$$

$$4^x = -64 - \text{уравнение не имеет смысла}; \quad 4^x = 1, \quad x = 0;$$

$$4^y = -1 - \text{уравнение не имеет смысла}; \quad 4^y = 64, \quad y = 3.$$

$$\text{г)} \begin{cases} \sqrt{2^x} - 3^y = -7, \\ 2^x - 3^y = -5; \end{cases} \quad 2^{\frac{x}{2}} - 2^x = -2, \quad 2^x - 2^{\frac{x}{2}} - 2 = 0. \quad \text{Пусть } 2^{\frac{x}{2}} = z,$$

$$\text{тогда} \quad z^2 - z - 2 = 0, \quad z_1 = 2, \quad z_2 = -1; \quad 2^{\frac{x}{2}} = 2, \quad 2^{\frac{x}{2}} = -1 - \text{уравнение не имеет смысла}; \quad \frac{x}{2} = 1, \quad x = 2; \quad 2^2 - 3^y = -5, \quad 3^y = 9, \quad y = 2.$$

$$\mathbf{194. а)} \begin{cases} \lg x - \lg y = 1, \\ \lg^2 x + \lg^2 y = 5. \end{cases} \quad \lg x = u, \quad \lg y = v, \quad \begin{cases} u - v = 1, \\ u^2 + v^2 = 5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = 1 + v, \\ (1+v)^2 + v^2 = 5; \end{cases} \quad 1 + 2v + v^2 + v^2 = 5, \quad 2v^2 + 2v - 4 = 0,$$

$$v^2 + v - 2 = 0, \quad v_1 = -2, \quad v_2 = 1; \quad u_1 = -1, \quad u_2 = 2; \quad \lg x = -1, \quad \lg x = 2,$$

$$x_1 = 0,1, \quad x_2 = 100; \quad \lg y = -2, \quad \lg y = 1, \quad y = 0,01, \quad y = 10.$$

Ответ: (0,1; 0,001); (100; 10).

$$\text{б)} \begin{cases} \log_2(x^2 + y^2) = 5, \\ 2 \log_4 x + \log_2 y = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0, \quad y > 0, \\ \log_2(x^2 + y^2) = \log_2 32, \\ \log_2 x + \log_2 y = \log_2 16; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0, \quad y > 0, \\ x^2 + y^2 = 32, \\ xy = 16; \end{cases}$$

$$x = \frac{16}{y}, \quad \frac{256}{y^2} + y^2 = 32, \quad y^4 - 32y^2 + 256 = 0, \quad (y^2 - 16)^2 = 0,$$

$$y_1 = 4, \quad y_2 = -4 - \text{на удовлетворяет условию } x > 0; \quad x_1 = 4. \quad \text{Ответ: } (4; 4).$$

$$\text{в)} \begin{cases} \lg x - \lg y = 7, \\ \lg x + \lg y = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0, \\ y > 0; \end{cases} \quad 2 \lg x = 12, \quad \lg x = 6, \quad x = 10^6; \quad 6 + \lg y = 5,$$

$$\lg y = -1, \quad y = \frac{1}{10}.$$

Ответ: $(10^6; 0,1)$.

$$\text{г)} \begin{cases} \log_2(x+1) = \log_2\left(y + \frac{1}{4}\right), \\ \log_2 x - 2 \log_2\left(y - \frac{1}{2}\right) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0, \\ x+1 > 0, \\ y + \frac{1}{4} > 0, \\ y - \frac{1}{2} > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0, \\ x > -1, \\ y > -\frac{1}{4}, \\ y > \frac{1}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0, \\ y > \frac{1}{2}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+1=y+\frac{1}{4}, \\ x=\left(y-\frac{1}{2}\right)^2; \end{cases} \begin{cases} x-y=-\frac{3}{4}, \\ x=\left(y-\frac{1}{2}\right)^2; \end{cases} \left(y-\frac{1}{2}\right)^2-y=-\frac{3}{4},$$

$$y^2-y+\frac{1}{4}-y+\frac{3}{4}=0, \quad y^2-2y+1=0, \quad (y-1)^2=0, \quad y=1, \quad x=0,25.$$

$$195. \text{ a) } \begin{cases} y-\log_3 x=1, \\ x^y=3^{12}; \end{cases} \quad x>0, \quad x \neq 1. \quad \begin{cases} y=1+\log_3 x, \\ y \log_3 x=12 \log_3 3; \end{cases} \quad \begin{cases} y=1+\log_3 x, \\ (1+\log_3 x) \log_3 x=12. \end{cases}$$

$$\log_3 z = z, \quad (1+z)z=12, \quad z^2+z-12=0, \quad z_1=-4, \quad z_2=3;$$

$$\log_3 x_1 = -4, \quad \log_3 x_2 = 3; \quad x_1 = \frac{1}{81}, \quad x_2 = 27; \quad y_1 = 1-4, \quad y_1 = -3,$$

$$y_2 = 1+3, \quad y_2 = 4. \quad \text{Ответ: } \left(\frac{1}{81}; -3\right); (27; 4).$$

$$\text{б) } \begin{cases} 3^{1+\log_3(x^2+y^2)}=15, \\ \log_3(x^2-y^2)-\log_3(x-y)=0; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+y^2 \neq 0, \\ x^2-y^2 \neq 0, \\ x > y; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 \cdot 3^{\log_3(x^2+y^2)}=15, \\ \frac{x^2-y^2}{x-y}=1; \end{cases} \quad \begin{cases} 3(x^2+y^2)=15, \\ (x+y)=1; \end{cases} \quad \begin{cases} 3(1-y)^2+3y^2=15, \\ x=1-y; \end{cases}$$

$$3-6y+3y^2+3y^2-15=0, \quad 6y^2-6y-12=0, \quad y^2-y-2=0, \\ y_1=2, \quad y_2=-1; \quad x_1=-1, \quad x_2=2; \quad (-1; 2) \text{ — не является решением системы.}$$

$$\text{в) } \begin{cases} \log_5 x + 3^{\log_3 y} = 7, \\ x^y = 5^{12}; \end{cases} \quad \begin{cases} \log_5 x + y = 7, \\ y \log_5 x = 12 \log_5 5; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 7 - \log_5 x, \\ y(\log_5 x) = 12; \end{cases}$$

$$(7 - \log_5 x) \cdot \log_5 x = 12. \quad \log_5 x = z, \quad (7-z)z=12,$$

$$7z-z^2-12=0, \quad z^2-7z+12=0, \quad z_1=3, \quad z_2=4; \quad \log_5 x_1=3,$$

$$x_1=125, \quad y_1=4; \quad \log_5 x_2=4, \quad x_2=625, \quad y_2=3.$$

$$\text{Ответ: } (125; 4); (625; 3).$$

$$\text{г) } \begin{cases} 5^{1+\log_5(x^2-y^2)}=25, \\ \log_5(x^2-y^2)=\log_5(x+y); \end{cases} \quad \begin{cases} 5 \cdot (x^2-y^2)=25, \\ \frac{x^2-y^2}{x+y}=1; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2-y^2=5, \\ x-y=1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=5, \\ x-y=1; \end{cases} \quad x=3, \quad y=2.$$

$$\text{Ответ: } (3; 2).$$

$$196. \text{ а) } \begin{cases} \log_4 x - \log_2 y = 0, \\ x^2 - 2y^2 = 8; \\ x > 0, \quad y > 0; \end{cases} \begin{cases} \log_4 x - 2 \log_4 y = 0, \\ x^2 - 2y^2 = 8; \\ x > 0, \quad y > 0; \end{cases}$$

$x = y^2$, $y^4 - 2y^2 - 8 = 0$, $y = 2$ или $y = -2$ — не удовлетворяет условию системы; $y = 2$, $x = 4$. Ответ: (4; 2).

$$\text{б) } \begin{cases} 3^{2\sqrt{x}-\sqrt{y}} = 81, \\ \lg \sqrt{xy} = 1 + \lg 3; \\ x > 0, \quad y > 0; \end{cases} \begin{cases} 3^{2\sqrt{x}-\sqrt{y}} = 3^4, \\ \lg \sqrt{xy} = \lg 10 \cdot 3, \\ x > 0, \quad y > 0; \end{cases} \begin{cases} x > 0, \quad y > 0, \\ 2\sqrt{x} - \sqrt{y} = 4, \\ \sqrt{xy} = 30; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0, \quad y > 0, \\ 2\sqrt{x} - \sqrt{y} = 4, \\ \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = 30. \end{cases} \text{ Пусть } \sqrt{x} = u, \quad \sqrt{y} = v, \text{ тогда } \begin{cases} 2u - v = 4, \\ u \cdot v = 30; \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = 2u - 4, \\ u \cdot (2u - 4) = 30; \end{cases} \quad 2u^2 - 4u - 30 = 0, \quad u^2 - 2u - 15 = 0, \quad u_1 = 5, \quad u_2 = -3;$$

$v_1 = 6$, $v_2 = -10$; $\sqrt{x} = 5$, $\sqrt{y} = -3$ — уравнение решений не имеет;

$x = 25$, $\sqrt{y} = 6$, $\sqrt{y} = -10$ — уравнение решений не имеет; $y = 36$.

$$\text{в) } \begin{cases} \log_9 x - \log_3 y = 0, \\ x^2 - 5y^2 + 4 = 0; \end{cases} \begin{cases} x > 0, \quad y > 0, \\ x = y^2, \\ x^2 - 5y^2 + 4 = 0; \end{cases} \quad y^4 - 5y^2 + 4 = 0,$$

$y = 2$, $x = 4$; $y = -2$ — не удовлетворяет условию;

$y = 1$, $x = 1$; $y = -1$ — не удовлетворяет условию.

Ответ: (4; 2), (1; 1).

$$\text{г) } \begin{cases} 2 \log_2 x - 3^y = 15, \\ 3^y \log_2 x = 2 \log_2 x + 3^{y+1}. \end{cases}$$

$$\text{Пусть } \log_2 x = u, \quad 3^y = v, \text{ тогда } \begin{cases} 2u - v = 15, \\ v \cdot u = 2u + 3v; \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = 2u - 15, \\ (2u - 15)u = 2u + 3(2u - 15); \end{cases} \quad 2u^2 - 15u - 2u - 6u + 45 = 0,$$

$$2u^2 - 23u + 45 = 0, \quad u_1 = 9, \quad u_2 = 2,5; \quad v_1 = 3, \quad v_2 = -10; \quad \log_2 x_1 = 9,$$

$\log_2 x_2 = 2,5$; $x_1 = 512$, $x_2 = 2^{2,5}$; $3^y = 3$, $y_1 = 1$, $3^y = -10$ — уравнение не имеет смысла. Ответ: (512; 1).

20. Задачи на составление уравнений и систем уравнений

197. Пусть x км/ч – скорость автобуса по старому расписанию, тогда $(x + 10)$ км/ч – скорость по новому расписанию; t – время движения по старому расписанию; $(t - \frac{2}{3})$ – время движения по новому расписанию. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} x \cdot t = 325, \\ (x + 10)\left(t - \frac{2}{3}\right) = 325; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{325}{t}, \\ xt - \frac{2}{3}x + 10t - \frac{20}{3} = xt; \end{cases}$$

$$-2x + 30t - 20 = 0, \quad -\frac{325}{t} + 15t - 10 = 0, \quad 3t^2 - 2t - 65 = 0, \quad t_1 = 5,$$

$$t_2 = -\frac{26}{6} - \text{не является решением по смыслу задачи};$$

$$x = 325 : 5 = 65 \text{ (км/ч)}; \quad x + 10 = 65 + 10 = 75 \text{ (км/ч)}.$$

Ответ: скорость автобуса по старому расписанию 65 км/ч, по новому – 75 км/ч.

198. Пусть скорость течения x км/ч, тогда $(15 - x)$ км/ч – скорость лодки против течения и $(x + 15)$ км/ч – скорость лодки по течению. Можно составить уравнение по условию задачи.

$$\frac{139\frac{1}{3}}{x + 15} + \frac{139\frac{1}{3}}{15 - x} = 20, \quad \frac{418}{3(x + 15)} + \frac{418}{3(15 - x)} = 20, \quad x \neq 15, \quad x \neq -15;$$

$$418(15 - x) + 418(x + 15) = 60(15^2 - x^2), \quad 418(15 - x + x + 15) = 30(15^2 - x^2), \\ 209 \cdot 30 = 30 \cdot (15^2 - x^2), \quad 209 = 15^2 - x^2, \quad x^2 = 16, \quad x_1 = -4 - \text{не является решением}; \quad x_2 = 4. \text{ Ответ: скорость течения } 4 \text{ км/ч.}$$

199. Пусть x км/ч – первоначальная скорость; t – время в пути, тогда $x \cdot t = 220$; $(x + 5)$ км/ч – новая скорость, $(t - 2\frac{1}{6})$ ч – время,

$$\text{затраченное на оставшийся путь, тогда } 2x + (x + 5)(t - 2\frac{1}{6}) = xt.$$

Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} x \cdot t = 220, \\ 2x + (x + 5)\left(t - 2\frac{1}{6}\right) = xt; \end{cases} \quad \begin{cases} t = \frac{220}{x}, \\ 2x + xt + 5t - 2\frac{1}{6}x - \frac{65}{6} = xt; \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = \frac{220}{x}, \\ 5t - \frac{1}{6}x - \frac{65}{6} = 0; \end{cases} \quad \frac{5 \cdot 220}{x} - \frac{x}{6} - \frac{65}{6} = 0, \quad 6600 - x^2 - 65x = 0,$$

$$x^2 + 65x - 6600 = 0, \quad x_1 = 55, \quad x_2 = -120 - \text{не является решением.}$$

Ответ: первоначальная скорость 55 км/ч.

200. Пусть v км/ч – скорость I теплохода, тогда $(x + 6)$ км/ч – скорость второго теплохода. Т.к. они двигались перпендикулярно:

$$(2x)^2 + (2(x+6))^2 = 60^2, \quad 4x^2 + 4(x+6)^2 = 60^2,$$

$$4x^2 + 4x^2 + 48x + 144 = 3600, \quad x^2 + 6x - 432 = 0, \quad x_1 = 18, \quad x_2 = -24 -$$

не решение. $x + 6 = 18 + 6 = 24$ (км/ч). Ответ: 18 км/ч, 24 км/ч.

201. Пусть t – время до встречи первого тела; $(t - 5)$ с – время движения второго тела. Путь первого тела:

$$t \frac{12 + 6(t-1)}{2} = 6t + 3t^2 - 3t = 3t^2 + 3t.$$

$$\text{Путь второго тела: } 12(t-5). \quad 3t^2 + 3t + 12t - 60 = 390,$$

$$t^2 + 5t - 150 = 0, \quad t_1 = 10, \quad t_2 = -15 - \text{не является решением, т.к. мы пользуемся положительным временем.} \quad \text{Ответ: 10 с.}$$

202. Пусть n – дневная норма по плану; тогда

$$\frac{2160}{n} = \frac{2320 - 3n}{n + 80} + 4, \quad 2160n + 80 \cdot 2160 = 2320n - 3n^2 + 4n^2 + 320n,$$

$$n^2 + 480n - 172800 = 0, \quad n_1 = 240, \quad n_2 = -700 - \text{не может выражать объем грунта.} \quad \text{Ответ: } 240 \text{ м}^3.$$

203. Пусть x – число дней, необходимое I бригаде, тогда $x + 6$ – число дней, необходимое второй бригаде. Имеем уравнение:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+6} = \frac{1}{4}, \quad x^2 + 6x - 8x + 24 = 0, \quad x^2 - 2x - 24 = 0, \quad x_1 = 6, \quad x_2 = -4 - \text{не}$$

может выражать число дней; $x + 6 = 12$ Ответ: 6 дней, 12 дней.

204. Пусть затребовали x машин; грузоподъемность каждой машины $\frac{60}{x}$. Имеем уравнение:

$$\frac{60}{x} - 0,5 = \frac{60}{x+4}, \quad 120(x+4) - (x+4)x = 120x, \quad x^2 + 4x - 480 = 0,$$

$$x_1 = 20, \quad x_2 = -24 - \text{не является решением.}$$

Ответ: 20 машин.

205. Пусть $x\%$ меди в первом куске, $(x + 15)\%$ меди во втором куске. Имеем уравнение:

$$\frac{5 \cdot 100}{x} + \frac{4 \cdot 100}{x+15} = 30, \quad 50x + 750 + 40x = 3x^2 + 45x, \quad x^2 - 15x - 250 = 0,$$

$x_1 = 25$, $x_2 = -10$ – не является решением. Ответ: 25%

206. Пусть x г – было количество раствора; $\frac{40}{x}$ – процентное содержание соли в первоначальном растворе; $x + 200$ – количество нового раствора; $\frac{40}{x+200}$ – процентное содержание соли в новом

растворе. По условию задачи имеем уравнение: $\frac{40}{x} - \frac{40}{x+200} = 0,1$

$$40x + 8000 - 40x = 0,1(x^2 + 200x), \quad x^2 + 200x - 8000 = 0, \quad x_1 = 200,$$

$x_2 = -400$ – не является решением по смыслу задачи.

$$\frac{40}{200} \cdot 100\% = 20\%, \quad 200 - 40 = 160 \text{ (г)}. \quad \text{Ответ: } 20\%, 160 \text{ г воды}.$$

207. Пусть x – скорость третьей машины; t – время движения третьей машины до встречи с первой. Составим систему:

$$\begin{cases} xt = 40 \cdot \frac{1}{2} + 40t, \\ x\left(t + \frac{3}{2}\right) = 50 \cdot 2 + 50t; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{20 + 40t}{t}, \\ xt + \frac{3}{2}x = 100 + 50t; \end{cases}$$

$$100 + 50t - \frac{3}{2}x = 20 + 40t, \quad 80 + 10t = \frac{3}{2}x, \quad 80 + 10t = \left(\frac{20 + 40t}{t}\right) \cdot \frac{3}{2},$$

$160t + 20t^2 = 60 + 120t, \quad t^2 + 2t - 3 = 0, \quad t_1 = 1, \quad t_2 = -3$ – не является решением задачи; $x = 20 + 40 = 60$ (км/ч). Ответ: 60 км/ч.

208. Пусть V м/с – скорость поезда; S м – длина поезда. $S = 7V$,

$$V = \frac{378 + 7V}{25}, \quad 25V = 378 + 7V, \quad 18V = 378, \quad V = 21 \text{ (м/с)};$$

$$S = 7 \cdot 21 = 147 \text{ (м)}. \quad \text{Ответ: } V = 21 \text{ м/с}, S = 147 \text{ м}.$$

209. Пусть V_1 км/ч – первоначальная скорость первого пешехода;

V_2 км/ч – второго пешехода. Имеем: $5(V_1 + V_2) = 50$,

$$V_1 + V_2 = 10, \quad V_2 = 10 - V_1; \quad \frac{5V_1}{V_2 + 1} - \frac{50 - V_1}{V_1 - 1} = 2,$$

$$5V_1(V_1 - 1) - (50 - 5V_1)(V_2 + 1) = 2(V_2 + 1)(V_1 - 1);$$

$$V_2 = 10 - V_1, \text{ поэтому}$$

$$5V_1(V_1 - 1) - (50 - 5V_1)(10 - V_1 + 1) = 2(10 - V_1 + 1)(V_1 - 1),$$

$$V_1^2 + 38V_1 - 264 = 0, \quad V_1 = 6 \text{ км/ч}, \quad V_2 = 4 \text{ км/ч}.$$

Ответ: 6 км/ч, 4 км/ч.

210. Пусть двигателей типа *A* изготовили x штук и y – типа *B*.

Составим систему:
$$\begin{cases} 2x + 3y = 130, \\ x + 2y = 80; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 80 - 2y, \\ 160 - 4y + 3y = 130; \end{cases} \quad y = 30, \quad x = 20.$$

Ответ: 20 двигателей типа *A*, 30 двигателей типа *B*.

211. Пусть x дней нужно первому рабочему, тогда второму необходимо $25 - x$. Составим уравнение, приняв всю работу за 1:

$$\frac{1}{12} = \frac{1}{2x} + \frac{1}{2(25-x)}; \quad x(25-x) = 6(25-x) + 6x, \quad 25x - x^2 = 150 - 6x + 6x,$$

$x^2 - 25x + 150 = 0$, $x_1 = 15$, $x_2 = 10$. Тогда второй соответственно за 10 и 15 дней. Ответ: 15 дней и 10 дней.

212. Пусть x масса первой жидкости, тогда масса II в смеси $60 - x$.

Объем первой жидкости $\frac{x}{1,2}$, объем второй $\frac{60-x}{1,6}$, объем всей

смеси $\frac{x}{1,2} + \frac{60-x}{1,6}$, плотность смеси равна

$$60 : \left(\frac{x}{1,2} + \frac{60-x}{1,6} \right) = \frac{60 \cdot 4,8}{4x + 3(60-x)} = \frac{288}{x+180}. \quad \text{По условию } 8 \cdot \frac{288}{x+180} = x,$$

откуда $x^2 + 180x - 2304 = 0$, $x = 12$ или $x = -192$ – не является решением.

Следовательно, при $x = 12$ плотность смеси равна $\frac{288}{x+180}$, то есть $1,5 \text{ г/см}^3$; первой жидкости 12 г, второй – 48 г.

Ответ: 12 г, 48 г, $1,5 \text{ г/см}^3$.

213. Пусть x – масса серебра в сплаве, тогда $m + 3$ серебра составит 90%, а масса серебра в нем равна $x + 3$; таким образом, $\frac{9}{10}(m+3) = x+3$. В сплаве массой $m + 2$ серебро составит 84%; но

серебра в добавленных 2 кг сплава содержится $2 \cdot \frac{9}{10} \text{ кг} = \frac{9}{5} \text{ кг}$,

поэтому в новом сплаве серебро составит $\left(x + \frac{9}{5} \right) \text{ кг}$ и

$$\frac{84}{100}(m+2) = x + \frac{9}{5}. \quad \text{Получим систему:}$$

$$\begin{cases} \frac{9}{10}(m+3) = x+3, \\ \frac{84}{100}(m+2) = x+\frac{9}{5}; \end{cases} \begin{cases} 9(m+3) = 10(x+3), \\ 21(m+2) = 25(x+\frac{9}{5}); \end{cases} \begin{cases} 9m+27 = 10x+30, \\ 21m+42 = 25x+45; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9m = 10x+3, \\ 21m = 25x+3; \end{cases} \begin{cases} m = \frac{10x+3}{9}, \\ 21 \cdot \frac{10x+3}{9} = 25x+3; \end{cases} \quad \frac{7}{3}(10x+3) = 25x+3,$$

$$70x+21 = 75x+9, 5x = 21-9, x = \frac{12}{5}, x = 2,4, m = \frac{10 \cdot 2,4+3}{9}, m = \frac{27}{9},$$

$$m = 3. \quad 2,4\% - a\%, \quad 3 - 100\%, \quad a = \frac{2,4}{3} \cdot 100 = 80\%.$$

Ответ: масса сплава 3 кг, процентное содержание серебра 80%.

214. Пусть первая точка делает оборот за x с, тогда вторая – за $(x+5)$

с. Тогда за 1 мин. первая точка сделает $\frac{60}{x}$ оборотов, вторая $\frac{60}{x+5}$

оборотов. По условию $\frac{60}{x} - \frac{60}{x+5} = 1$, значит $60(x+5-x) = x(x+5)$,

$x^2 + 5x - 300 = 0$, $x = -20$ (не подходит) или $x = 15$. Получили, что первая точка делает полный оборот за 15 с, вторая за 20 с. Скорость первой точки 4 м/с, второй 3 м/с. Ответ: 4 м/с, 3 м/с.

215. Пусть число десятков a , число единиц b . Число равно $10a + b$.

$$a^2 + b^2 = 13; \quad 10a + b - 9 = 10b + a. \quad \begin{cases} a^2 + b^2 = 13, \\ 9a - 9b = 9; \end{cases} \quad \begin{cases} a^2 + b^2 = 13, \\ a - b = 1; \end{cases}$$

$$(b+1)^2 + b^2 = 13, \quad b^2 + 2b + 1 + b^2 = 13, \quad 2b^2 + 2b - 12 = 0, \quad b^2 + b - 6 = 0,$$

$b = 2$ или $b = -3$ – не цифра. По смыслу $b > 0$, поэтому $b = 2$, $a = 3$ и исходное число равно 32. Ответ: 32.

216.

$a^2 - b^2 = 55$, $a, b \in \mathbb{N}$. $(a-b)(a+b) = 55$, причем $a-b$, $a+b$ – натуральные числа. Но $55 = 55 \cdot 1 = 5 \cdot 11$, поэтому либо

$$\begin{cases} a-b=1, \\ a+b=55, \end{cases} \quad \text{либо} \quad \begin{cases} a-b=5, \\ a+b=11. \end{cases}$$

Из первой системы $2b = 54$, $b = 27$ и $a = 28$;

из второй системы $2a = 16$, $a = 8$ и $b = 3$.

Ответ: 27 и 28; 3 и 8.

§ 5. Производная, первообразная, интеграл и их применения

21. Производная

217. а) $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$,

$$\Delta f = \frac{1}{2}(1,1)^2 - \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{1}{2}(1,1^2 - 1^2) = \frac{1}{2} \cdot 0,21 = 0,105, \quad \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{0,105}{0,1} = 1,05;$$

б) $\Delta f = \sqrt{2,21} - 1 - \sqrt{2-1} = 1,1 - 1 = 0,1, \quad \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{0,1}{0,21} = \frac{10}{21};$

в) $\Delta f = 3 - 2(2,2) - (3 - 2 \cdot 2) = 3 - 4,4 - 3 + 4 = -0,4, \quad \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{-0,4}{0,2} = -2;$

г) $\Delta f = \frac{1}{1,1+1} - \frac{1}{1} = \frac{1}{2,1} - 1 = \frac{10}{21} - 1 = -\frac{11}{21},$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{-\frac{11}{21}}{0,1} = -\frac{11 \cdot 10}{21} = -\frac{110}{21} = -5 \frac{5}{21}.$$

218.

а) $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1 - 4(x + \Delta x) - (1 - 4x)}{\Delta x} =$
 $= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1 - 4x - 4\Delta x - 1 + 4x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-4\Delta x}{\Delta x} = -4;$

б) $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1,5(x + \Delta x)^2 - 1,5x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1,5x^2 + 3x\Delta x + 1,5\Delta^2 x - 1,5x^2}{\Delta x} =$
 $= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(3x + 1,5\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3x + 1,5\Delta x) = 3x;$ при $x_0 = 2$ имеем $f'(x_0) = 6;$

в) $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3(x + \Delta x) + 2 - 3x - 2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3x + 3\Delta x + 2 - 3x - 2}{\Delta x} =$
 $= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3\Delta x}{\Delta x} = 3;$

г) $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^3 + 1 - x^3 - 1}{\Delta x} =$
 $= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta^2 x + \Delta^3 x + 1 - x^3 - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta^2 x)}{\Delta x} =$
 $= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3x^2 + 3x\Delta x + \Delta^2 x) = 3x^2;$ при $x_0 = -1$ имеем $f'(x_0) = 3.$

$$219. \text{ a) } f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + 5, \quad f'(x) = x^3 - x^2 + x - 1;$$

$$\text{б) } f(x) = (4 - x^2)\sin x, \quad f'(x) = (4 - x^2)' \cdot \sin x + (4 - x^2)(\sin x)' = \\ = -2x \cdot \sin x + (4 - x^2)\cos x;$$

$$\text{в) } f(x) = (x^2 + 5)(x^3 - 2x + 2), \quad f'(x) = 2x(x^3 - 2x + 2) - (x^2 + 5)(3x^2 - 2) = \\ = 2x^4 - 4x^2 + 4x - 3x^4 + 2x^2 - 15x^2 + 10 = -x^4 - 17x^2 + 4x + 10;$$

$$\text{г) } f(x) = \frac{\cos x}{2 - x^3},$$

$$f'(x) = \frac{-\sin x(2 - x^3) - \cos x \cdot (-3x^2)}{(2 - x^3)^2} = \frac{-2\sin x + x^3 \sin x + 3x^2 \cos x}{(2 - x^3)^2}.$$

$$220. \text{ a) } f(x) = \frac{3}{x^3} - \sqrt[5]{x} + \frac{5}{\sqrt[3]{x}} = 3 \cdot x^{-3} - x^{\frac{1}{5}} + 5 \cdot x^{-\frac{1}{3}},$$

$$f'(x) = 3 \cdot (-3x^{-4}) - \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}} + 5 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot x^{-\frac{1}{3}} = -\frac{9}{x^4} - \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}} - \frac{5}{3\sqrt[3]{x^4}};$$

$$\text{б) } f(x) = (2 - \sqrt{x})\operatorname{tg} x, \quad f'(x) = \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\operatorname{tg} x + \frac{2 - \sqrt{x}}{\cos^2 x};$$

$$\text{в) } f(x) = \frac{x^3 - 3x}{1 - 2x},$$

$$f'(x) = \frac{(3x^2 - 3)(1 - 2x) - (x^3 - 3x)(-2)}{(1 - 2x)^2} = \frac{3x^2 - 6x^3 - 3 + 6x + 2x^3 - 6x}{(1 - 2x)^2} = \frac{-4x^3 + 3x^2 - 3}{(1 - 2x)^2};$$

$$\text{г) } f(x) = \frac{\sin x}{1 - 2\cos x}, \quad f'(x) = \frac{\cos x(1 - 2\cos x) - \sin x \cdot 2\sin x}{(1 - 2\cos x)^2} = \frac{\cos x - 2}{(1 - 2\cos x)^2}.$$

$$221. \text{ a) } f(x) = 2^x + \lg x, \quad f'(x) = 2^x \ln 2 + \frac{1}{x \ln 10};$$

$$\text{б) } f(x) = e^{-3x} + 2 \log_3 2x, \quad f'(x) = -3e^{-3x} + \frac{4}{2x \ln 3} = -3e^{-3x} + \frac{2}{x \ln 3};$$

$$\text{в) } f(x) = x^2 \cdot 5^{2x}, \quad f'(x) = 2x \cdot 5^{2x} + x^2 \cdot 2 \cdot 5^{2x} \cdot \ln 5 = 2 \cdot 5^{2x} \cdot x(1 + x \ln 5);$$

$$\text{г) } f(x) = \frac{\ln x}{e^x + e^{-x}}, \quad f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(e^x + e^{-x}) - \ln x(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2}.$$

222.

$$\text{a) } f(x) = \sin 3x + \cos 5x, \quad f'(x) = 3 \cos 3x - 5 \sin 5x;$$

$$\text{б) } f(x) = \sqrt[4]{1 + x^2} + \frac{1}{(2x - 1)^3}; \quad f'(x) = \frac{2x}{4\sqrt[4]{(1 + x^2)^3}} - \frac{6}{(2x - 1)^4};$$

$$\text{в) } f(x) = (3 - 2x^3)^5, \quad f'(x) = 5(3 - 2x^3)^4 \cdot (-6x^2) = -30x^2(3 - 2x^3)^4;$$

$$\text{г) } f(x) = \lg(3x) + 3\operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right),$$

$$f'(x) = \frac{3}{3x \ln 10} + \frac{3 \cdot 2}{\cos^2\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{x \ln 10} + \frac{6}{\cos^2\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)}.$$

223.

$$\text{а) } f'(x) = 4x^3 - 4x, \quad 4x^3 - 4x = 0, \quad 4x(x^2 - 1) = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = -1;$$

$$\text{б) } f'(x) = 3 \cos 2x - 5 \cos x - 1, \quad 3 \cos 2x - 5 \cos x - 1 = 0,$$

$$6 \cos^2 x - 3 - 5 \cos x - 1 = 0, \quad \cos x = y, \quad 6y^2 - 5y - 4 = 0,$$

$$y_1 = 1 \frac{1}{12}, \quad y_2 = -\frac{1}{2}; \quad \cos x = 1 \frac{1}{12} - \text{не имеет смысла};$$

$$\cos x = -\frac{1}{2}, \quad x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\text{в) } f'(x) = -x^4 + 10x^2 - 9, \quad -x^4 + 10x^2 - 9 = 0, \quad x^4 - 10x^2 + 9 = 0;$$

$$\text{Пусть } x^2 = y, \text{ тогда } y^2 - 10y + 9 = 0, \quad y_1 = 9, \quad y_2 = 1; \quad x^2 = 9, \quad x^2 = 1;$$

$$x_1 = 3, \quad x_2 = -3, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = -1;$$

$$\text{г) } f'(x) = 1 - 2 \sin 2x, \quad 1 - 2 \sin 2x = 0, \quad \sin 2x = \frac{1}{2}, \quad 2x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

224.

$$\text{а) 1) а) } f'(x) > 0 \text{ в точке } x_3;$$

$$\text{б) } f'(x) < 0 \text{ в точках } x_1, \quad x_5;$$

$$\text{в) } f'(x) = 0 \text{ в точках } x_2 \text{ и } x_4.$$

$$\text{2) а) } f'(x) > 0 \text{ при } x \in (x_2; x_4);$$

$$\text{б) } f'(x) < 0 \text{ при } x \in (a; x_2) \cup (x_4; b);$$

$$\text{в) } f'(x) = 0 \text{ при } x_2 \text{ и } x_4.$$

3) Функция имеет производную во всех точках $(a; b)$.

$$\text{б) 1) а) } f'(x) > 0 \text{ в точках } x_1 \text{ и } x_8;$$

$$\text{б) } f'(x) < 0 \text{ в точке } x_6;$$

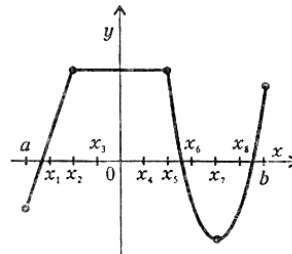
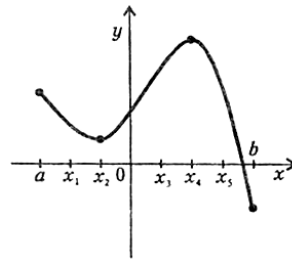
$$\text{в) } f'(x) = 0 \text{ в } x_2, x_3, x_4, x_5, x_7.$$

$$\text{2) а) } f'(x) > 0 \text{ при } x \in (a; x_2) \cup (x_7; b);$$

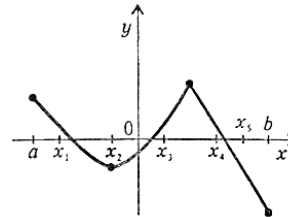
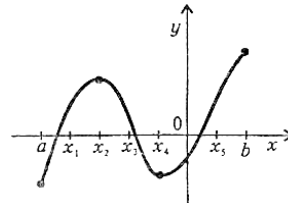
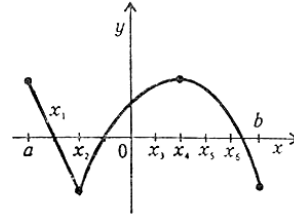
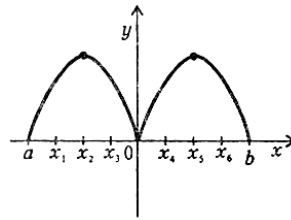
$$\text{б) } f'(x) < 0 \text{ при } x \in (x_5; x_7);$$

$$\text{в) } f'(x) = 0 \text{ при } x \in (x_2; x_5) \text{ и в } x_7.$$

3) Функция не имеет производной во всех x_2, x_5 .



- в) 1) а) $f'(x) > 0$ в x_1 и x_4 ;
 б) $f'(x) < 0$ в x_3 , x_6 ;
 в) $f'(x) = 0$ в x_2 и x_5 .
- 2) а) $f'(x) > 0$ при $x \in (a; x_2) \cup (0; x_5)$;
 б) $f'(x) < 0$ при $x \in (x_2; 0) \cup (x_5; b)$;
 в) $f'(x) = 0$ в x_2 и x_5 .
- 3) Производная не существует в точке 0.
- г) 1) а) $f'(x) > 0$ в x_3 ;
 б) $f'(x) < 0$ в x_1 , x_5 , x_6 ;
 в) $f'(x) = 0$ в x_4 .
- 2) а) $f'(x) > 0$ при $x \in (x_2; x_4)$;
 б) $f'(x) < 0$ при $x \in (a; x_2) \cup (x_4; b)$;
 в) $f'(x) = 0$ в x_4 .
- 3) Производная не существует в x_2 .



225.

- а) $y'(x_1) > y'(x_2)$;
 б) $y'(x_1) > y'(x_3)$;
 в) $y'(x_2) = y'(x_4)$;
 г) $y'(x_3) < y'(x_5)$.

226.

- а) $y'(x_1) < y'(x_2)$;
 б) $y'(x_3) > y'(x_5)$;
 в) $y'(x_4) = y'(x_5)$;
 г) $y'(x_2) > y'(x_4)$.

227.

$(uvw)' = (u \cdot (vw))' = u'(vw) + u(vw)' = u'vw + u(v'w + vw') = u'vw + uv'w + uvw'$,
 что требовалось доказать.

22. Применение производной к исследованию функций

228. $f(x) \approx (x_0) + f'(x_0)\Delta x$; а) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$, $f'(x) = x^2 - 1$,

$$f(x_1) \approx f(2) + f'(2) \cdot 0,0057 = \frac{8}{3} - 2 + 3 \cdot 0,0057 = \frac{2}{3} + 0,0171 = \\ = 0,6667 + 0,0171 = 0,6838;$$

$$f(x_2) \approx f(2) - f'(2) \cdot 0,021 \approx 0,6667 - 0,063 \approx 0,6037 \approx 0,604;$$

$$\text{б) } f(x) = 2 + 4x - x^2 + \frac{1}{4}x^4, \quad f'(x) = 4 - 2x + x^3; \quad x_1 = 3 + 0,005,$$

$$f(x_1) \approx f(3) + 0,005 f'(3) = 2 + 12 - 9 + \frac{1}{4} \cdot 81 + 0,005(4 - 6 + 27) =$$

$$= 5 + 20 \frac{1}{4} \cdot 0,005 \cdot 25 = 5 + 20,25 + 0,125 = 25,375; \quad x_2 = 2 - 0,02,$$

$$f(x_2) \approx f(2) - 0,02 f'(2) = 2 + 8 - 4 + \frac{1}{4} \cdot 16 - 0,02(4 - 4 + 8) =$$

$$= 10 - 0,02 \cdot 8 = 10 - 0,16 = 9,84.$$

$$\text{229. а) } \sqrt[3]{9,009} = \sqrt[3]{9(1+0,001)} = 3\sqrt[3]{1+0,001} \approx 3\left(1 + \frac{1}{3} \cdot 0,001\right) = 3 + 0,0005 = 3,0005;$$

$$\text{б) } 1,0001^{15} = (1 + 0,0001)^{15} = 1 + 15 \cdot 0,0001 = 1,0015;$$

$$\text{в) } 0,999^{-5} = (1 - 0,001)^{-5} \approx 1 - 0,001 \cdot (-5) = 1,005;$$

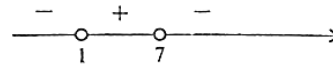
$$\text{г) } \sqrt[3]{8,008} = \sqrt[3]{8(1,001)} = 2\sqrt[3]{1+0,001} \approx 2\left(1 + \frac{1}{3} \cdot 0,001\right) \approx 2 + \frac{2}{3} \cdot 0,001 \approx$$

$$\approx 2 + 0,666 \cdot 0,001 = 2,006.$$

230.

$$\text{а) } f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x^2 - 7x + 18, \quad D(f) = (-\infty; \infty), \quad f'(x) = -x^2 + 8x - 7.$$

критические точки:



$$f'(x) = 0, \quad -x^2 + 8x - 7 = 0, \quad x^2 - 8x + 7 = 0, \quad x_1 = 7, \quad x_2 = 1;$$

$$f'(0) < 0, \quad f'(2) > 0, \quad f'(8) < 0;$$

$f(x)$ возрастает при $x \in [1; 7]$, убывает при $x \in (-\infty; 1] \cup [7; \infty)$;

$$x_{\min} = 1, \quad x_{\max} = 7.$$

$$\text{б) } f(x) = \frac{2x^2}{3-x}, \quad D(f) = (-\infty; 3) \cup (3; \infty),$$

$$f'(x) = \frac{4x(3-x) + 2x^2}{(3-x)^2} = \frac{-4x^2 + 12x + 2x^2}{(3-x)^2} = \frac{-2x^2 + 12x}{(3-x)^2}.$$

Критические точки: $\frac{-2x^2 + 12x}{(3-x)^2}$

$$-2x^2 + 12x = 0, \quad -x(2x - 12) = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 6;$$

$$f'(-1) < 0, f'(1) > 0, f'(4) > 0, f'(7) < 0;$$

$f(x)$ возрастает при $x \in [0; 3]$ и $(3; 6]$, убывает при $x \in (-\infty; 0] \cup [6; \infty)$;
 $x_{\min} = 0, x_{\max} = 6$;

$$\text{в) } f(x) = \frac{x(x^3 - 4)}{2} = \frac{1}{2}(x^4 - 4x), D(f) = (-\infty; \infty),$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (4x^3 - 4) = 2x^3 - 2; f'(x) = 0, 2x^3 - 2 = 0,$$

$$\begin{array}{c} - \quad + \\ \hline \circ \\ 1 \end{array} \rightarrow$$

$$2(x^3 - 1) = 0, x^3 = 1, x = 1.$$

$f'(0) < 0, f'(2) > 0$; $f(x)$ возрастает при $x \in [1; \infty)$, убывает при
 $x \in (-\infty; 1]$; $x_{\min} = 1$;

$$\text{г) } f(x) = \frac{x}{4-x}, D(f) = (-\infty; 4) \cup (4; \infty),$$

$$f'(x) = \frac{4-x-x(-1)}{(4-x)^2} = \frac{4-x+x}{(4-x)^2} = \frac{4}{(4-x)^2}; \text{ при любом } x \neq 4 \quad x > 0,$$

поэтому функция возрастает на $D(f)$, экстремумов нет.

$$\mathbf{231. а) } f(x) = \cos 2x - 2 \cos x, D(f) = (-\infty; \infty),$$

$$f'(x) = -2 \sin 2x + 2 \sin x; -4 \sin x \cdot \cos x + 2 \sin x = 0,$$

$$-2 \sin x(2 \cos x - 1) = 0, \sin x = 0 \quad \text{или} \quad 2 \cos x = 1, x = \pi n, n \in \mathbb{Z} \quad \text{или}$$

$$\cos x = \frac{1}{2}, x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; f(x) \text{ возрастает при}$$

$$x \in \left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; 0 + 2\pi n\right] \cup \left[\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \pi + 2\pi n\right], n \in \mathbb{Z},$$

$$\begin{array}{c} - \quad + \quad - \quad + \\ \hline \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \\ -\pi \quad -\frac{\pi}{3} \quad 0 \quad \frac{\pi}{3} \quad \pi \end{array} \xrightarrow{\text{знак } f'(x)}$$

убывает на

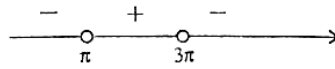
$$x \in \left[-\pi + 2\pi n; -\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right] \cup \left[2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right], n \in \mathbb{Z},$$

$$x_{\min} = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, x_{\min} = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, x_{\max} = 0 + 2\pi n;$$

$$\text{б) } f(x) = 2 - \sin \frac{x}{2}, D(f) = (-\infty; \infty), f'(x) = -\frac{1}{2} \cos \frac{x}{2}; -\frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} = 0,$$

$$\cos \frac{x}{2} = 0, \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0, \quad f'\left(\frac{3\pi}{2}\right) > 0;$$



возрастает при $x \in [\pi + 4\pi n; 3\pi + 4\pi n], n \in \mathbb{Z}$, убывает при

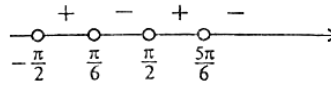
$x \in [-\pi + 4\pi n; \infty + 4\pi n], n \in \mathbb{Z}, x_{\min} = \pi + 4\pi n, n \in \mathbb{Z},$

$x_{\max} = 3\pi + 4\pi n, n \in \mathbb{Z};$

в) $f(x) = 2\sin x + 2\cos 2x, D(f) = (-\infty; \infty), f'(x) = 2\cos x - 2\sin 2x;$

$$2\cos x - 2\sin 2x = 0,$$

$$2\cos x - 4\sin x \cdot \cos x = 0,$$



$$2\cos x(1 - 2\sin x) = 0, \quad \cos x = 0 \quad \text{или} \quad \sin x = \frac{1}{2},$$

$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z};$ возрастает при

$$x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right] \cup \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right], \quad n \in \mathbb{Z},$$

убывает при

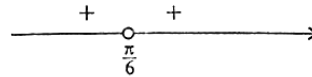
$$x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right), \quad x_{\max} = \frac{\pi}{6} + 2\pi n;$$

$$x_{\max} = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \quad x_{\min} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

г) $f(x) = 3x - \cos 3x, D(f) = (-\infty; \infty), f'(x) = 3 + 3\sin 3x;$

$$3 - 3\sin 3x = 0, \quad \sin 3x = 1, \quad 3x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}, \quad n \in \mathbb{Z},$$



$f'(0) > 0, f'\left(\frac{\pi}{4}\right) > 0;$ возрастает на $(-\infty; \infty).$

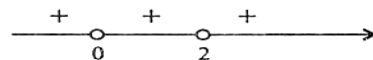
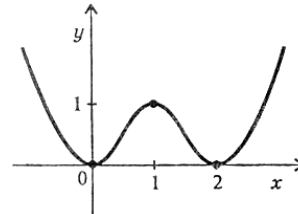
232. а) $f(x) = x^2(x-2)^2 = x^4 - 4x^3 + 4x^2;$

1) $D(f): x \in (-\infty; \infty);$ 2) $E(f): y \in (-\infty; 0);$

3) нули: $x^2(x-2)^2 = 0,$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 2;$$

4) промежутки знакопостоянства:



$f(-2) > 0; f(5) > 0; f(1) > 0, y \geq 0$ при любом $x;$

$$5) f(-x) = (-x)^2(-x-2)^2 = x^2(-x-2)^2 \neq f(x) \neq -f(x),$$

ни четная, ни нечетная;

$$6) f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x; \text{ найдем критические точки:}$$

$$4x^3 - 12x^2 + 8x = 0, \quad 4x(x^2 - 3x + 2) = 0, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 0,$$

возрастает при

$$x \in [0; 1] \cup [2; \infty],$$

убывает при $x \in (-\infty; 0] \cup$

$$[1; 2], \quad x_{\min} = 0, \quad x_{\min} = 2, \quad x_{\max} = 1, \quad f'(3) > 0, \quad f(0) = 0,$$

$$f(1) = 1, \quad f(2) = 0;$$

$$6) f(x) = \frac{8}{x} + \frac{x}{2} = \frac{16 + x^2}{2x};$$

$$1) D(f): x \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty); \quad 2) E(f): y \in (-\infty; 4) \cup (4; \infty);$$

3) нулей нет;

4) знакопостоянство:

$y > 0$ при $x > 0, y < 0$ при $x < 0$;

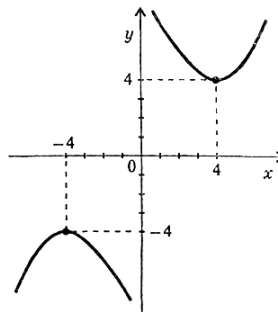
$$5) f(-x) = \frac{16 + (-x)^2}{2(-x)} = -\frac{16 + x^2}{2x} = -f(x) -$$

нечетная;

$$6) f'(x) = \frac{2x \cdot 2x - (16 + x^2) \cdot 2}{4x^2} =$$

$$= \frac{4x^2 - 32 - 2x^2}{4x^2} =$$

$$= \frac{2x^2 - 32}{4x^2} = \frac{x^2 - 16}{2x^2};$$



$$7) \text{ критические точки: } \frac{x^2 - 16}{2x^2} = 0, \quad x_1 = 4, \quad x_2 = -4;$$

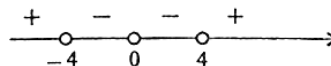
$$f'(5) > 0, \quad f'(1) < 0, \quad f'(-1) < 0, \quad f'(-5) > 0; \quad x_{\max} = -4,$$

$$f(-4) = -4, \quad x_{\min} = 4,$$

$$f(4) = 4,$$

возрастает при $x \in (-\infty; -4] \cup [4; \infty)$,

убывает при $x \in [4; 0) \cup (0; 4]$;



в) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$;

1) $D(f) : x \in (-\infty; \infty)$;

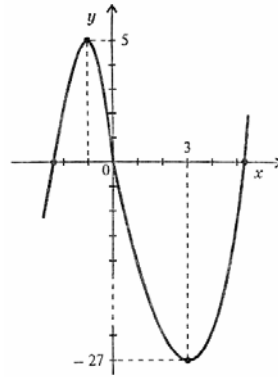
2) $E(f) : y \in (-\infty; \infty)$;

3) нули: $x^3 - 3x - 9x = 0$,

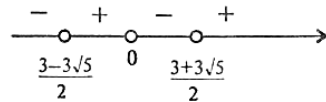
$x(x^3 - 3x - 9) = 0$,

$x_1 = 0$,

$x_2 = \frac{3+3\sqrt{5}}{2}, x_3 = \frac{3-3\sqrt{5}}{2}$;



4) знак: $f(20) > 0$;



5) $f'(-x) = (-x)^3 - 3(-x^2) - 9(-x) = -x^3 - 3x^2 + 9x \neq f(x) \neq -f(x)$ — ни четная, ни нечетная;

6) $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$; найдем критические точки:

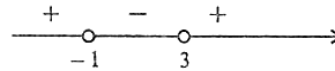
$3x^2 - 6x - 9 = 0$,

$x^2 - 2x - 3 = 0$,

$x_1 = 3, x_2 = -1$;

возрастает при $x \in (-\infty; -1] \cup [3; \infty)$, убывает при $x \in [-1; 3]$,

$x_{\max} = -1, x_{\min} = 3, f(-1) = 5, f(3) = -27$;



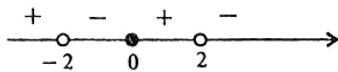
г) $f(x) = \frac{x}{4-x^2}$;

1) $D(f) : x \in (-\infty; 2) \cup (-2; 2) \cup (2; \infty)$;

2) $E(f) : y \in (-\infty; \infty)$;

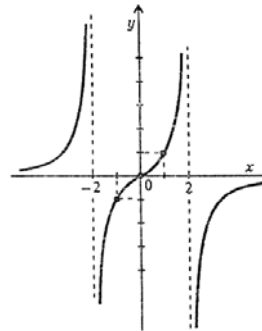
3) нули: $\frac{x}{4-x^2} = 0, x = 0$,

4) знак:



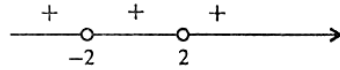
$f(3) < 0, f(1) > 0, f(-1) < 0, f(-3) > 0$;

5) $f(-x) = \frac{-x}{4-(-x)^2} = -\frac{x}{4-x^2}$ — функция нечетная;



$$6) f(x) = \frac{4-x^2-x(-2x)}{(4-x^2)^2} = \frac{4-x^2+2x^2}{(4-x^2)^2} = \frac{x^2+4}{(4-x^2)^2};$$

$x = \pm 2$ – точки разрыва функции;



возрастает при $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; \infty)$, $f(5) > 0$,

$f'(0) > 0$, $f'(-5) > 0$, экстремумов нет.

233.

a) $f(x) = 1 - 2 \sin 2x$;

1) $D(f): x \in (-\infty; \infty)$;

2) $E(f): y \in [-1; 3]$;

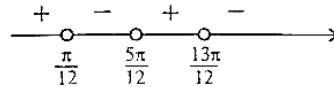
3) нули: $1 - 2 \sin 2x = 0$,

$$\sin 2x = \frac{1}{2}, \quad 2x =$$

$$= (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

4) знак:



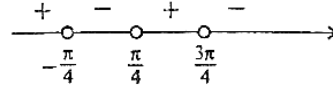
5) $f(-x) = 1 - 2 \sin(-2x) = 1 + 2 \sin 2x \neq f(x) \neq -f(x)$ – ни четная, ни нечетная;

6) $f'(x) = -4 \cos 2x$;

критические точки: $-4 \cos 2x = 0$, $2x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$,

$n \in \mathbb{Z}$; возрастает при

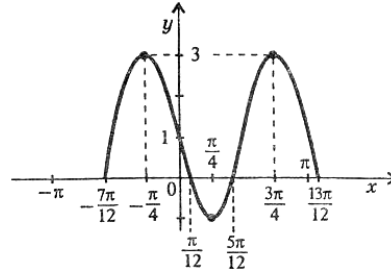
$$x \in \left[-\frac{3\pi}{4} + \pi n, -\frac{\pi}{4} + \pi n \right], \quad n \in \mathbb{Z},$$



убывает при $x \in \left[-\frac{\pi}{4} + \pi n, \frac{\pi}{4} + \pi n \right]$, $n \in \mathbb{Z}$,

$$x_{\max} = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x_{\min} = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad f\left(-\frac{\pi}{4} + \pi n\right) = 3, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$f\left(\frac{\pi}{4} + \pi n\right) = -1, \quad n \in \mathbb{Z};$$



7) периодическая с $T = \pi$;

б) $f(x) = \cos^2 x - \cos x$;

1) $D(f): x \in (-\infty; \infty)$;

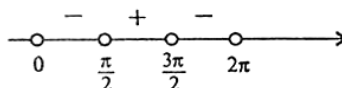
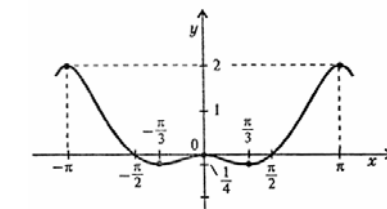
2) $E(f): y \in [-\frac{1}{4}; 2]$;

3) нули: $\cos^2 x - \cos x = 0$,
 $\cos x(\cos x - 1) = 0$,

$\cos x_1 = 0$ или $\cos x_2 = 1 = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$,

$\cos x_2 = 1$, $x_2 = 2\pi k$, $k \in Z$;

4) знак:



5) $f(-x) = \cos^2(-x) - \cos(-x) = \cos^2 x - \cos x$ — четная;

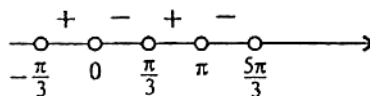
6) $f'(x) = -2 \cos x \cdot \sin x + \sin x = \sin x(1 - 2 \cos x)$;

критические точки: $\sin x(1 - 2 \cos x) = 0$, $\sin x_1 = 0$ или

$1 - 2 \cos x = 0$, $x_1 = \pi n$, $n \in Z$, $\cos x = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$,

$x_3 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$,

$x_{\max} = \pi n$, $n \in Z$,



$x_{\min} = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $x_{\min} = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$;

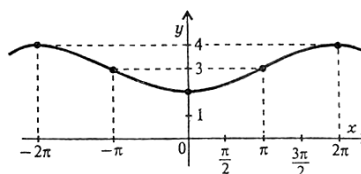
$f(-\frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{4}$, $f(0) = 0$, $f(\frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{4}$, $f(\pi) = 2$; возрастает при

$x \in [-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; 0 + 2\pi n] \cup [\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \pi + 2\pi n]$, $n \in Z$,

убывает при $x \in [2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n] \cup [\pi + 2\pi n; \frac{5\pi}{3} + 2\pi n]$, $n \in Z$;

7) периодическая с $T = 2\pi$;

в) $f(x) = 3 - \cos \frac{x}{2}$;



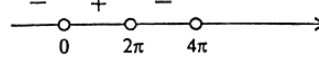
1) $D(f): x \in (-\infty; \infty)$; 2) $E(f): y \in [2; 4]$;

3) нули: $3 - \cos \frac{x}{2} = 0, \cos \frac{x}{2} = 3$, нет корней;

4) $y > 0$ при всех $x \in D(f)$;

5) $f(-x) = 3 - \cos(-\frac{x}{2}) = 3 - \cos \frac{x}{2}$ — четная;

6) $f'(x) = \frac{1}{2} \sin \frac{x}{2}$;



критические точки: $\frac{1}{2} \sin \frac{x}{2} = 0, \frac{x}{2} = \pi n, x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$;

возрастает на $[0 + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n], n \in \mathbb{Z}$, убывает на

$[2\pi + 2\pi n; 4\pi + 2\pi n], n \in \mathbb{Z}; x_{\max} = 2\pi + 4\pi n, n \in \mathbb{Z},$

$f(2\pi) = 4, x_{\min} = 4\pi n, n \in \mathbb{Z}, f(0) = 2$.

7) периодическая с $T = 4\pi$;

г) $f(x) = \sin^2 x - \sin x$;

1) $D(f): x \in (-\infty; \infty)$;

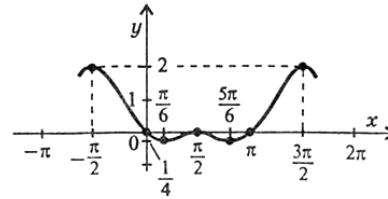
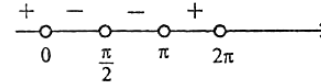
2) $E(f): y \in [-\frac{1}{4}; 2]$;

3) нули:

$\sin^2 x - \sin x = 0, \sin x(\sin x - 1) = 0,$

$\sin x_1 = 0$ или $\sin x_2 = 1, x_1 = \pi n, n \in \mathbb{Z}, x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$;

4) знак:

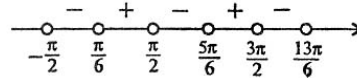


5) $f(x) = \sin^2(-x) - \sin(-x) = \sin^2 x + \sin x \neq f(x) \neq -f(x)$ — ни четная, ни нечетная;

6) $f'(x) = 2 \sin x \cdot \cos x - \cos x$;

критические точки: $2 \sin x \cdot \cos x - \cos x = 0,$

$\cos x(2 \sin x - 1) = 0, \cos x = 0, x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \sin x = \frac{1}{2},$



$x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$, возрастает при

$$x \in \left[\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n \right] \cup \left[\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n \right], \text{ убывает при}$$

$$x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k \right] \cup \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \right], \quad n \in \mathbb{Z}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$x_{\max} = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x_{\min} = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{1}{4}, \quad f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2.$$

7) периодическая с $T_0 = 2\pi$.

234.

a) $f(x) = \sqrt{x} \ln x$; 1) $D(f): x \in (0; \infty)$;

2) $E(f): y \in \left[-\frac{2}{e^2}; \infty \right)$;

3) нули: $\sqrt{x} \ln x = 0$, $x_1 = 0$,
 $x_2 = 1$; $0 \in D(f)$;

4) знак:

5) ни четная, ни нечетная;

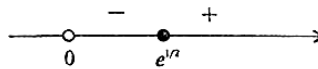
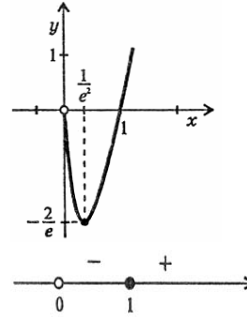
6) $y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x + \sqrt{x} \frac{1}{x} = \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x}$;

критические точки:

$$\frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x} = 0, \quad \frac{x \ln x + 2x}{2x\sqrt{x}} = 0, \quad x \ln x + 2x = 0, \quad x(\ln x + 2) = 0,$$

$$x_1 = 0, \quad \ln x_2 = -2, \quad 0 \in D(f), \quad x_2 = e^{-2}; \text{ возрастает при } x > e^{-2},$$

$$\text{убывает при } x \in (0; e^{-2}]; \quad x_{\min} = e^{-2}, \quad f\left(\frac{1}{e^2}\right) = -\frac{2}{e}.$$



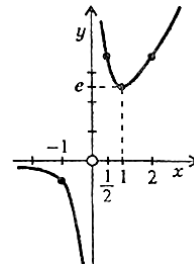
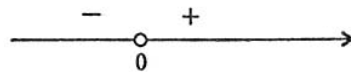
7) не периодическая.

б) $f(x) = \frac{e^x}{x}$; 1) $D(f): x \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$;

2) $E(f): y \in (-\infty; 0) \cup [e; \infty)$;

3) нулей нет;

4) знак:

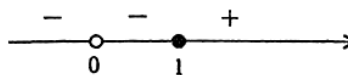


$y > 0$ при $x > 0$, $y < 0$ при $x < 0$;

5) $f(-x) = \frac{e^{-x}}{-x} = -\frac{1}{xe^x} \neq f(x) \neq -f(x)$ — ни четная, ни нечетная;

6) $f'(x)$ = критические точки:

$$\frac{e^x x - e^x}{x^2} = 0, \quad \frac{e^x (x-1)}{x^2} = 0, \quad x = 1,$$



убывает при $x \in (-\infty; 0)$ и $(0; 1]$, возрастает при

$$x \in [1; \infty); \quad x_{\min} = 1, \quad f(1) = e;$$

7) не периодическая;

в) $f(x) = 2^{x^2-4x}$;

1) $D(f): x \in (-\infty; \infty)$;

2) $E(f): y \in [\frac{1}{16}; \infty)$;

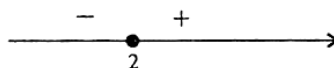
3) нулей нет;

4) $y > 0$ при всех $x \in D(f)$;

5) $f(-x) = 2^{(-x)^2-4(-x)} = 2^{x^2+4x} \neq f(x) \neq -f(x)$ — ни четная, ни нечетная;

6) $f'(x) = 2^{x^2-4x} \cdot \ln 2 \cdot (2x-4)$;

$$2^{x^2-4x} \cdot \ln 2 \cdot (2x-4) = 0,$$



возрастает при $x \in [2; \infty)$, убывает при $x \in (-\infty; 2]$,

$$x_{\min} = 2, \quad f(2) = \frac{1}{16};$$

7) не периодическая;

г) $f(x) = x - \ln x$;

1) $D(f): x \in (0; \infty)$; 2) $E(f): y \in [1; \infty)$; 3) нулей нет;

4) знак $y > 0$ при всех x ;

5) ни четная, ни нечетная;

6) $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$;

критические точки:

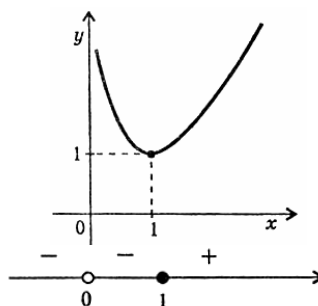
$$\frac{x-1}{x} = 0, \quad x = 1,$$

убывает при $x \in (0; 1]$,

возрастает при $x \in [1; \infty)$,

$$x_{\min} = 1, \quad f(1) = 1;$$

7) не периодическая.



235. а) Найдем значения функции на концах промежутка:

$$f(1) = 18 \cdot 1 + 8 \cdot 1 - 3 \cdot 1 = 18 + 8 - 3 = 23, \quad f(3) = 18 \cdot 9 + 8 \cdot 27 - 3 \cdot 81 = 135.$$

Критические точки функции:

$$f'(x) = 36x + 24x^2 - 12x^3, \quad 36x + 24x^2 - 12x^3 = 0,$$

$$3x + 2x^2 - x^3, \quad x(3 + 2x - x^2) = 0, \quad x_1 = 0,$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = -1, \quad -1 \in [1; 3].$$

Значение функции в критической точке: $f(0) = 0$.

Ответ: наибольшее значение функции равно 135, наименьшее — 0.

б) $f(0) = 2 \cos 0 - \cos 0 = 2 - 1 = 1, \quad f(\pi) = 2 \cos \pi - \cos 2\pi = -2 - 1 = -3,$

$$f'(x) = -2 \sin x + 2 \sin 2x, \quad -2 \sin x + 2 \sin 2x = 0, \quad -2 \sin x + 4 \sin x \cdot \cos x = 0,$$

$$-2 \sin x(1 - 2 \cos x) = 0, \quad \sin x = 0, \quad \cos x = \frac{1}{2}, \quad x = \pi, \quad x = \frac{\pi}{3},$$

$$f(\pi) = -3, \quad f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \cos \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{3} = 1 \frac{1}{2}.$$

в) $f(x) = \frac{2}{x} + x^2, \quad \left[\frac{1}{2}; 1\right],$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4 + \frac{1}{4} = 4 \frac{1}{4}, \quad f(1) = \frac{2}{1} + 1 = 3, \quad f'(x) = -\frac{2}{x^2} + 2x,$$

$$f'(x) = 0, \quad -\frac{2}{x^2} + 2x = 0, \quad -2 + 2x^3 = 0, \quad x^3 = 1, \quad x = 1, \quad f(1) = 3.$$

г) $f(x) = \sin x - x, \quad [-\pi; \pi], \quad f(-\pi) = \sin(-\pi) - (-\pi) = \pi,$

$$f(\pi) = \sin \pi - \pi = -\pi, \quad f'(x) = \cos x - 1, \quad \cos x - 1 = 0, \quad \cos x = 1, \quad x = \frac{\pi}{2}, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Ответ: наибольшее значение функции π , наименьшее — $-\pi$.

236. Если первое слагаемое x , то второе слагаемое $10 - x$.

Исследовав функцию $y = x^3 + (10 - x)^3$ на $[0; 10]$, найдем её

а) наибольшее; б) наименьшее значения на этом промежутке.

$$f(0) = 1000, \quad f(10) = 1000, \quad f'(x) = 60x - 300, \quad 60x - 300 = 0, \quad x = 5;$$

$$f(5) = 125 + 125 = 250.$$

237. Пусть первый катет x см, тогда второй $20 - x$ см. Исследуем

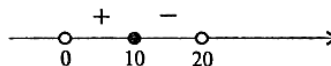
функцию $S(x) = \frac{1}{2}x(20 - x)$, равную площади этого треугольника,

найдем её наибольшее значение на $D(S)$.

$$S'(x) = 10 - x, \quad S'(15) < 0, \quad S'(5) > 0,$$

10 — точка максимума.

Ответ: I, II катеты по 10 см.

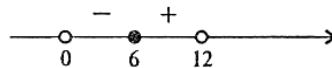


238. Пусть одна диагональ x см, вторая $12 - x$ см. Сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех его сторон.

$$P(x) = x^2 + (12 - x)^2 \text{ на } D(P).$$

$$P'(x) = 4x - 24, \quad 4x - 24 = 0, \quad x = 6,$$

$x = 6$ – точка минимума, значит, $S(6) = 72$ – наименьшее значение.
 Ответ: 72 см^2 .

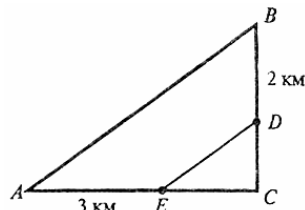


239.

Пусть первая машина находится в пункте B , а вторая в пункте A . Когда первая машина прибудет в пункт D , а вторая машина в пункт E . Это время обозначим t .

$$DC = 2 - 40t, \quad EC = 3 - 50t,$$

$$DE = \sqrt{(2 - 40t)^2 + (3 - 50t)^2}.$$

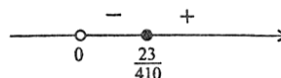


Рассмотрим функцию $S(t) = \sqrt{(2 - 40t)^2 + (3 - 50t)^2}$ и найдем её наименьшее значение на $M(S)$.

$$S'(t) = \frac{8200t - 460}{2\sqrt{(2 - 40t)^2 + (3 - 50t)^2}}, \quad 8200t - 460 = 0, \quad t = \frac{23}{410},$$

$$(2 - 40t)^2 + (3 - 50t)^2 = 4 - 160t + 1600t^2 + 9 - 300t + 2500t^2 = 4100t^2 - 460t,$$

$\frac{23}{410}$ – точка минимума, значит, $S\left(\frac{23}{410}\right)$ – наименьшее.



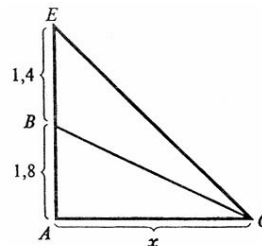
240.

Пусть наблюдатель находится за x м от стены в точке O . $\angle EOB$;

$\angle EOB = \angle EOA - \angle BOA$, поэтому:

$$\operatorname{tg} \angle EOB = \operatorname{tg}(\angle EOA - \angle BOA) =$$

$$= \frac{\frac{3,2}{x} - \frac{1,8}{x}}{1 + \frac{3,2}{x} \cdot \frac{1,8}{x}} = \frac{1,4x}{x^2 + 5,76},$$



$$f(x) = \frac{1,4x}{x^2 + 5,76}. \text{ Так как } 0 < \angle EOB < \frac{\pi}{2} \text{ и при } \alpha \in (0; \frac{\pi}{2}); \operatorname{tg} \alpha$$

возрастает, то найдем x , при котором $f(x)$ принимает наибольшее значение на $(0; \infty)$.

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 5,76) - x \cdot 2x}{(x^2 + 5,76)^2} \cdot 1,4 = \frac{1,4(5,76 - x^2)}{(x^2 + 5,76)^2}; \quad f'(x) = 0 \text{ при } x = 2,4.$$

При $x \in (2,4; \infty)$ $f'(x) < 0$, при $x \in (2,4; \infty)$ $f(x) < f(2,4)$.
аналогично, $f(x) < f(2,4)$ для $x \in (0; 2,4)$. Значит, $f_{\max} = f(2,4)$.

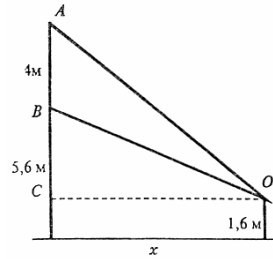
241.

Пусть наблюдатель находится за x м от статуи в точке O .

$$\angle AOB = \angle AOC - \angle BOC, \quad BC = 4 \text{ м.}$$

$$\operatorname{tg} \angle AOB = \operatorname{tg}(\angle AOC - \angle BOC) =$$

$$= \frac{\frac{8}{x} - \frac{4}{x}}{1 + \frac{8}{x} \cdot \frac{4}{x}} = \frac{4x}{x^2 + 32} = f(x).$$



$\angle AOB \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, а на $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ $\operatorname{tg} \alpha$ возрастает.

$$f'(x) = \frac{4(x^2 + 32) - 4x \cdot 2x}{(x^2 + 32)^2} = \frac{128 - 4x^2}{(x^2 + 32)^2} = \frac{4(32 - x^2)}{(x^2 + 32)^2};$$

$$f' = 0 \text{ при } x = \pm\sqrt{32} = \pm 4\sqrt{2}. \quad f_{\max} = f(4\sqrt{2}). \quad \text{Ответ: } 4\sqrt{2} \text{ м.}$$

242. По теореме Пифагора $R^2 = l^2 - h^2$, $R^2 = 400 - h^2$, где l — образующая;
 R — радиус оснований; h — высота конуса. Объем конуса равен:

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \pi (400h - h^3) \text{ (см}^3\text{)}. \quad \text{Таким образом, нужно найти}$$

наибольшее значение функции $f(h) = 400h - h^3$ на $[0; 20]$.

$$f'(h) = 400 - 3h^2, \quad f'(h) = 0 \text{ при } h = \frac{20}{\sqrt{3}}. \quad \text{Имеем } f(0) = f(20) = 0,$$

$$\text{а } f\left(\frac{20}{\sqrt{3}}\right) > 0, \text{ поэтому наибольшее значение } f(h) \text{ при } h = \frac{20}{\sqrt{3}}.$$

243.

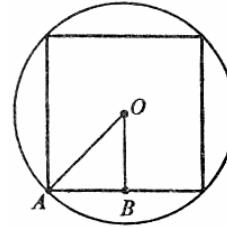
Из теоремы Пифагора:

$$\triangle AOB: AB^2 = AO^2 - BO^2, \text{ т.е.}$$

$$r^2 = R^2 - \frac{h^2}{4}, \text{ где } r \text{ — радиус основания}$$

цилиндра; h — высота;

$$V = \pi r^2 h = \pi \left(R^2 h - \frac{h^3}{4}\right).$$



Определим наибольшее значение функции $V(h) = \pi(R^2 h - \frac{h^3}{4})$ на $[0; 2R]$.

$$V'(h) = \pi(R^2 - \frac{3}{4}h^2), \quad V'(h) = 0 \text{ при } 3h^2 = 4R^2, \text{ т.е. при } h = \frac{2R}{\sqrt{3}}.$$

Т.к. как $V(0) = V(2R) = 0$, а $V\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right) = V_{\max}$, то функция $V(h)$

достигает наибольшего значения при $h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$. Ответ: $\frac{2R}{\sqrt{3}}$.

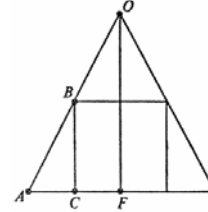
244. Пусть h высота цилиндра, тогда $\frac{r}{R} + \frac{h}{H} = \frac{OB}{OA} + \frac{AB}{OA} = 1$.

Преобразував, получим

$$h = \frac{(R-r)H}{R}. \quad \text{Далее полная поверхность}$$

цилиндра равна:

$$\begin{aligned} S(r) &= 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi \left(r^2 + \frac{r(R-r)H}{R} \right) = \\ &= 2\pi \frac{r^2(R-H) + rRH}{R} \end{aligned}$$



Найдем наибольшее значение $S(r)$ при $r \in (0; R)$. Функция S квадратичная при $R \neq H$, поэтому она может достигнуть наибольшего значения, если «ветви» параболы направлены вниз и абсцисса r_0 вершины параболы лежит на этом интервале.

$$r_0 = -\frac{RH}{2(R-H)}, \text{ и: 1) } R-H < 0 \text{ и 2) } -\frac{RH}{2(R-H)} < R, \text{ т.е. } H < 2(H-R),$$

значит $R < \frac{H}{2}$. При $R = H$ получаем, что $S(r) = 2\pi rH$, функция не

имеет наибольшего значения на $(0; R)$. Ответ: $R = H$.

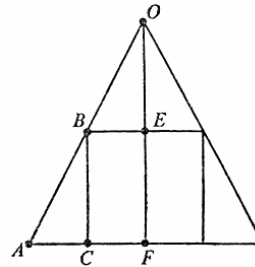
245. Пусть h и r высота и радиус основания цилиндра, соответственно, а H и R высота и радиус основания конуса. Получим:

$$\frac{r}{R} + \frac{h}{H} = \frac{OB}{OA} + \frac{AB}{OA} = 1, \text{ откуда}$$

$$H = \frac{Rh}{R-2}, \quad V(R) = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{\pi R^2 h}{3(R-r)}.$$

Найдем наименьшее значение функции $V(R)$ на $(2; \infty)$.

$$V'(R) = \frac{\pi h(2R^3 - 3R^2 r)}{3(R-r)^2};$$



$V'(R) = 0$ при $2R^3 = 3R^2r$, $R = 1,5r$. Итак, $V(1,5r) = V_{\min}$ на $(r; \infty)$, так как V убывает на $(r; 1,5r)$ и возрастает на $[1,5; \infty)$.

246.

Рассмотрим осевое сечение конуса.

$\triangle OEA \propto \triangle BEC$.

Отсюда: $\frac{OA}{EO} = \frac{BC}{EB}$, т.е.

$$\frac{R}{H-R} = \frac{x}{\sqrt{H^2 + x^2}}, \text{ значит, } \frac{R^2}{(H-R)^2} = \frac{x^2}{H^2 + x^2}.$$

$$R^2 H^2 + R^2 x^2 = (H-R)^2 x^2, \quad x^2((H-R)^2 - R^2) = R^2 H^2, \text{ откуда}$$

$$x^2 = \frac{R^2 H}{H-2R}. \text{ Таким образом, } V = \frac{1}{3} \pi x^2 H = \frac{1}{3} \frac{\pi R^2 H^2}{H-2R}.$$

Найдем наименьшее значение $V(H)$ на $(2R; \infty)$.

$$V'(H) = \frac{\pi R^2 (H^2 - 4RH)}{3(H-2R)^2} \text{ и } V'(H) = 0 \text{ при } H = 4R. V \text{ убывает при}$$

$H \in (2R; 4R)$ и возрастает при $H \in (4R; \infty)$, значит $V(4R) = V_{\min}$ на $(2R; \infty)$. Ответ: $4R$.

247. Рассмотрим осевое сечение конуса. $\triangle AOC \propto \triangle OBC$, значит:

$$\frac{x^2}{\sqrt{H^2 + x^2}} = \frac{R}{H}, \text{ поэтому } x^2 = \frac{H^2 R^2}{H^2 - R^2};$$

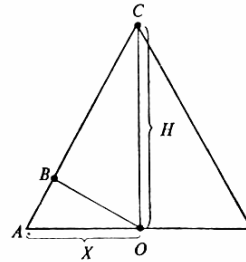
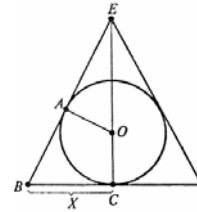
$$V(H) = \frac{1}{3} \pi x^2 H = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot \frac{H^3}{H^2 - R^2};$$

$$V'(H) = \frac{\frac{1}{3} \pi R^2 ((H^2 - R^2) 3H^2 - H^3 2H)}{(H^2 - R^2)^2} = \frac{\pi R^2 (H^4 - 3H^2 R^2)}{3(H^2 - R^2)^2}.$$

$$V'(H) = 0 \text{ если } H = R\sqrt{3}, \text{ Ответ: } H = R.$$

248. $h^2 = D^2 - b^2$. Прочность балки R выражается формулой $R = kbh^2$. Также $R(b) = kb(D^2 - b^2) = kb(1600 - b^2)$. Найдем наибольшее значение функции $R(b)$ на промежутке $[0; 40]$.

$$R'(b) = k(1600 - 3b^2) \text{ и } R'(b) = 0 \text{ при } b = \frac{40}{\sqrt{3}}.$$



$R(0) = R(40) = 0$, $R\left(\frac{40}{\sqrt{3}}\right) > 0$, значит, наибольшее значение R

достигает при $b = \frac{40}{\sqrt{3}}$, при этом $h = 40\sqrt{\frac{2}{3}}$.

249.

Пусть периметр равен P . Площадь окна

$$S(R) = 2R \cdot \frac{1}{2}(P - 2R - \pi R) + \frac{1}{2}\pi R^2 =$$

$$= PR - 2R^2 - \pi R^2 + \frac{1}{2}\pi R^2 = PR - \left(2 + \frac{\pi}{2}\right)R^2.$$

Функция $S(R)$ — квадратичная $a_0 < 0$, следовательно, имеет точку максимума:

$$S'(R) = P - \left(2 + \frac{\pi}{2}\right) \cdot 2R = P - (4 + \pi)R, \quad S'(R) = 0$$

$$\text{при } R = \frac{P}{4 + \pi}.$$

$$\text{Тогда } \frac{1}{2}(P - (2 + \pi)R) = \frac{1}{2}\left(P - \frac{2 + \pi}{4 + \pi}P\right) = \frac{1}{2}P \cdot \frac{4 + \pi - 2 - \pi}{4 + \pi} = \frac{P}{4 + \pi}, \quad \text{т.е.}$$

прямоугольная часть окна на самом деле имеет форму квадрата.

250.

Пусть $BC = 2x$, а $AH = y$. Тогда $S = xy$. Далее в прямоугольном $\triangle ABE$, поэтому $BH^2 = EH \cdot HA$, или $x^2 = y(2R - y)$ и $S^2 = x^2 y^2 = y^3(2R - y)$.

Найдем наибольшее значение функции $f(y) = y^3(2R - y)$ на $[0; 2R]$.

$$f'(y) = -4y^3 + 6Ry^2, \quad f'(y) = 0 \quad \text{при } y = 0 \text{ и}$$

$$y = 1,5R. \quad f(0) = f(2R) = 0, \quad f(1,5R) = \frac{27}{16}R^4.$$

Таким образом, площадь треугольника наибольшая, если хорда проведена на расстоянии $1,5R$ от точки касания.

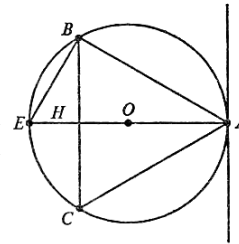
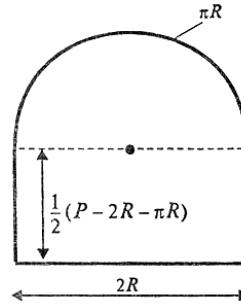
Ответ: $1,5R$ от точки касания.

251.

Если основание треугольника $2b$, и угол при основании 2α , то $r = OH = HC \cdot \operatorname{tg} \alpha = b \operatorname{tg} \alpha$. Выразим b через заданную площадь S

$$\text{треугольника: } S = 0,5 \cdot AC \cdot BH = b \cdot b \operatorname{tg} \alpha, \quad \text{значит, } b^2 = \frac{S}{\operatorname{tg} 2\alpha}.$$

Найдем наибольшее значение квадрата радиуса:



$$r^2 = b^2 \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{S \operatorname{tg}^2 \alpha}{\frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{S(1 - \operatorname{tg}^2 \alpha) \operatorname{tg}^2 \alpha}{2 \operatorname{tg} \alpha}.$$

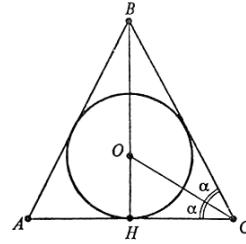
Пусть $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}^3 \alpha$ $u(\alpha)$. Найдем наибольшее значение функции $u(\alpha)$ на $[0; \frac{\pi}{4}]$.

$$u'(a) = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - \frac{3 \operatorname{tg}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha};$$

$$u'(a) = 0 \text{ при } \operatorname{tg} \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ т.е. при } \alpha = \pi k \pm \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}. x_0 = \frac{\pi}{6},$$

$$x_0 \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]. \text{ Далее: } u(0) = u\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \text{ и } u\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}}. u_{\max}(\alpha) = u\left(\frac{\pi}{6}\right).$$

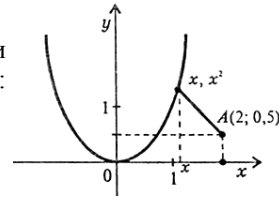
Угол при вершине равен $\pi - 4\alpha = \frac{\pi}{3}$.



252.

Расстояние между точкой на параболы и данной точкой A равно:

$$r(x) = \sqrt{(2-x)^2 + \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2}.$$



$f(x) = r^2(x)$; так как $r(x) > 0$ для всех x , их минимумы должны совпадать.

$$f'(x) = 2(2-x)(-1) + 2\left(x^2 - \frac{1}{2}\right) \cdot 2x = -4 + 2x + 4x - 2x = 4x^3 - 4 = 4(x^3 - 1), f'(x) = 0$$

при $x = 1$, причем при $x < 1$ имеем $f'(x) < 0$, при $x > 1$ имеем $f'(x) > 0$, значит $x = 1$ — точка минимума функции $f(x)$ и,

следовательно, функции $r(x)$.

Ответ: (1; 1).

253. Если сторона основания x , то площадь основания $\frac{x^2 \sqrt{3}}{4}$, а

объем равен: $\frac{hx^2 \sqrt{3}}{4}$ (h — высота призмы), значит $h = \frac{4V}{x^2 \sqrt{3}}$. Полная

поверхность $S(x)$ $x \in (0; \infty)$. $S'(x) = x\sqrt{3} - \frac{4V\sqrt{3}}{x^2}$. $S'(x) = 0$ при

$x^3 = 4V$. $S(x)$ убывает при $x \in (0; \sqrt[3]{4V})$ и возрастает при $x \in (\sqrt[3]{4V}; \infty)$, значит $S(\sqrt[3]{4V})$ — наименьшее значение S на $(0; \infty)$. Ответ: $\sqrt[3]{4V}$.

23. Применения производной в физике и геометрии

254. а) $x_1(t) = 2\frac{2}{3}t^3$, $x^2(t) = 2t - 3$;

$x_1'(t) = 8t^2$, $x_2'(t) = 2$, $v_1(t) < v_2(t)$ при

$8t^2 < 2$, $4t^2 < 1$, $t^2 < \frac{1}{4}$, $-\frac{1}{4} < t < \frac{1}{4}$.

б) $x_1(t) = 9t^2 + 1$, $x_2(t) = t^3$. $v_1(t) = 18t$, $v_2(t) = 3t^2$, $v_1(t) < v_2(t)$ при
 $18t < t^2$, $t^2 - 18t > 0$, $t(t - 18) > 0$, $t > 0$ и $t > 18$.

255. $\varphi(t) = 0,1t^2 - 0,5t + 0,2$; $\omega(t) = \varphi'(t) = 0,2t - 0,5$;

$\omega(20) = 0,2 \cdot 20 - 0,5 = 3,5 \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}} \right)$.

256.

$r'(t) = 0,01(\text{см/с})$, $S(t) = \pi r^2(t)$, $S'(t) = 2\pi r(t)r'(t)$; при $r = 2$ см

$S' = 2\pi \cdot 2 \cdot 0,01 = 0,04\pi \text{ см}^2/\text{с}$.

257.

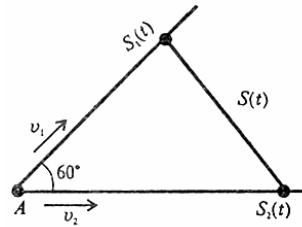
$s_1(t) = 5t$, $s_2(t) = 2t^2 - t$.

Найдем расстояние между телами

$s^2(t) = s_1^2(t) + s_2^2(t) -$

$- 2s_1(t)s_2(t) \cdot \cos 60^\circ =$

$= s_1^2(t) + s_2^2(t) - s_1(t)s_2(t)$,



$s(t) = \sqrt{s_1^2(t) + s_2^2(t) - s_1(t)s_2(t)} = \sqrt{25t^2 + (2t^2 - t)^2 - 5t(2t^2 - t)} =$

$= \sqrt{25t^2 + 4t^4 - 4t^3 + t^2 - 10t^3 + 5t^2} = \sqrt{4t^4 - 14t^3 + 31t^2}$;

скорость удаления тел друг от друга равна:

$s'(t) = \frac{1}{2}(4t^4 - 14t^3 + 31t^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (16t^3 - 42t^2 + 62t) = \frac{2(8t^3 - 21t^2 + 31t)}{2\sqrt{4t^4 - 14t^3 + 31t^2}} =$

$= \frac{t(8t^2 - 21t + 31)}{t\sqrt{4t^2 - 14t + 31}} = \frac{8t^2 - 21t + 31}{\sqrt{4t^2 - 14t + 31}}$. При $t = 3$:

$s'(3) = \frac{8 \cdot 9 - 21 \cdot 3 + 31}{\sqrt{4 \cdot 9 - 14 \cdot 3 + 31}} = \frac{72 - 63 + 31}{\sqrt{36 - 42 + 31}} = \frac{40}{\sqrt{25}} = 8 \text{ (км/ч)}$.

258.

Пусть A удалена от нуля на x м,

$$x(t) = 2t \text{ (м);}$$

Расстояние от B до начала координат

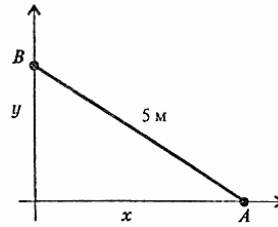
$$y(t) = \sqrt{25 - x^2(t)} = \sqrt{25 - 4t^2}.$$

Скорость B равна:

$$y'(t) = \frac{-8t}{2\sqrt{25 - 4t^2}} = \frac{-4t}{\sqrt{25 - 4t^2}};$$

в момент, когда $x = 3$ (м), $t = \frac{3}{2}$ (с),

$$\text{значит, } y'\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{4 \cdot \frac{3}{2}}{\sqrt{25 - 4 \cdot \frac{9}{4}}} = -\frac{6}{\sqrt{25 - 9}} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}.$$



259. $x(t) = 2t$

Верхний конец лестницы находится на высоте $y = \sqrt{25 - x^2}$,

$$y(t) = \sqrt{25 - 4t^2};$$

скорость движения верхнего конца

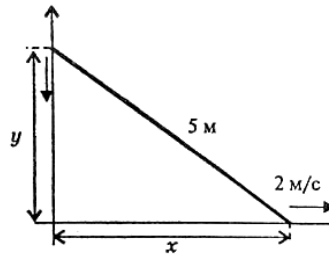
$$y'(t) = \frac{1}{2}(25 - 4t^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-8t) = \frac{-8t}{2\sqrt{25 - 4t^2}} = -\frac{4t}{\sqrt{25 - 4t^2}};$$

скоростью конца лестницы является

$$\frac{4t}{\sqrt{25 - 4t^2}}; \text{ Найдем ускорение:}$$

$$y''(t) = \frac{4\sqrt{25 - 4t^2} - 4t \cdot \frac{-4t}{\sqrt{25 - 4t^2}}}{\sqrt{25 - 4t^2}^2} = \frac{4(25 - 4t^2 + 4t^2)}{(25 - 4t^2)\sqrt{25 - 4t^2}} = \frac{100}{\sqrt{(25 - 4t^2)^3}}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{4t}{\sqrt{25 - 4t^2}}; \frac{100}{\sqrt{(25 - 4t^2)^3}}.$$



260. $m(x) = kx^2$; $m(2) = 10$, $10 = k \cdot 4$, $k = 2,5$.

$$1) m(12) = 2,5 \cdot 144 = 360; \rho(x) = m'(x) = 5x.$$

$$2) \rho(0) = 0; \rho(12) = 60.$$

Ответ: 1) 360 г; 5x г/см; 2) 0 г/см; 60 г/см.



261. $\varphi(t) = kt^2$; при $t = 8$ имеем $\varphi(t) = 2\pi$, $2\pi = k \cdot 64$, $k = \frac{\pi}{32}$.

Угловая скорость колеса равна:

$$\omega(t) = \varphi'(t) = \frac{\pi}{32} \cdot 2t = \frac{\pi}{16} t; \quad \omega(48) = \frac{\pi}{16} \cdot 48 = 3\pi.$$

262. $x(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0t + x_0$, $v_0 = 40$ (м/с), $x_0 = 10$ м, $g = 10$ м/с²;

$$x(t) = -5t^2 + 40t + 10.$$

а) $x(5) = -5 \cdot 25 + 40 \cdot 5 + 10 = 210 - 125 = 85$ (м).

б) Тело в наивысшей точке при $v(t) = 0$,

$$v(t) = x'(t) = -10t + 40, \quad -10t + 40 = 0, \quad t = 4\text{с};$$

$$x(4) = -5 \cdot 16 + 40 \cdot 4 + 10 = -80 + 160 + 10 = 90 \text{ (м)}.$$

263. Угловым коэффициентом касательной — $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$. Так как

$\alpha = 45^\circ$, то $\operatorname{tg}\alpha = 1$, найдем x_0 , в которой

а) $f'(x_0) = 1$ и б) $f'(x_0) = -1$.

$$f'(x_0) = -x. \text{ а) } -x = 1, \quad x = -1, \quad f(-1) = -1,5; \text{ б) } -x = -1, \quad x = 1, \quad f(1) = -1,5.$$

Ответ: а) $x_0 = -1$, б) $x_0 = 1$, $M_1(-1; -1,5)$; $M_2(1; -1,5)$.

264. $\operatorname{tg}135^\circ = -1$.

$$f'(x) = 3x^2 + x - 1, \quad 3x^2 + x - 1 = -1, \quad 3x^2 + x = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = -\frac{1}{3}.$$

265. $f'(x) = 3x^2 + x - 1$, $3x^2 + x + 1 = 0$, $D < 0$, нет корней; угловым коэффициентом касательной не обращается в ноль, касательная не параллельна оси Ox , поэтому пересекает эту ось.

266. $f'(x) = 5x^4 + 2$; $f'(x)$ принимает положительные значения при всех x , значит, угловые коэффициенты всех касательных положительны, все касательные образуют с осью Ox острый угол.

267. $(x+2)^2 = 2 - x^2$, $x^2 + 4x + 4 = 2 - x^2$, $2x^2 + 4x + 2 = 0$, $x^2 + 2x + 1 = 0$, $(x+1)^2 = 0$, $x = -1$;

при $x = -1$ $f(x) = g(x)$, это и означает, что точка с абсциссой $x_0 = -1$ есть общая точка для графиков этих функций. Запишем уравнения касательных и графиков этих функций в точках с абсциссой, равной -1 .

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0.$$

$$f'(x) = 2x + 4, \quad f'(-1) = 2, \quad f(-1) = 1, \quad y_1 = 2(x+1) + 2 = 2x + 2 + 2 = 2x + 4;$$

$$g'(x) = -2x, \quad g'(-1) = 2, \quad g(-1) = 1, \quad y_2 = 2(x+1) + 1 = 2x + 3$$

$y_1 = 2x + 4$ и $y_2 = 2x + 3$. Графики имеют общую касательную.

24. Первообразная

268. а) $F(x) = -4 \cos x + \frac{1}{3} \sin 3x + c$; б) $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^{-4}}{4} + \frac{x^{3+\sqrt{3}}}{3+\sqrt{3}} + c$;

в) $F(x) = 2x + 3 \ln |x-1| + c$; г) $F(x) = \operatorname{tg} 2x - \operatorname{ctg} 3x + c$.

269. Найдем c .

а) $F(x) = 2 \ln |x| + c$, $2 = 2 \ln \frac{1}{e} + c$, $2 = -2 + c$, $c = 4$; $F(x) = 2 \ln |x| + 4$;

б) $F(x) = -\frac{1}{x} + \sin x + c$,

$-\frac{2}{\pi} = -\frac{1}{\frac{\pi}{2}} + \sin \frac{\pi}{2} + c$, $-\frac{2}{\pi} = -\frac{2}{\pi} + 1 + c$, $c = -1$; $F(x) = -\frac{1}{x} + \sin x - 1$;

в) $F(x) = -\frac{1}{3x^3} + c$, $-3 = -\frac{1}{24} + c$, $c = -2\frac{23}{24}$; $F(x) = -\frac{1}{3x^3} - 2\frac{23}{24}$;

г) $F(x) = -\frac{1}{2} \cos 2x + c$, $1 = -\frac{1}{2} \cos 0 + c$, $1 = -\frac{1}{2} + c$, $c = 1,5$;

$F(x) = -\frac{1}{2} \cos 2x + 1,5$.

270. $f'(x) = 2x - 3$, $f(x) = x^2 - 3x + c$. Найдем c : $f(2) = 2$, откуда $c = 4$.

Ответ: $f(x) = x^2 - 3x + 4$.

271. $F(x) = x^3 + C$, значит при $x = 2$ и $y = 3$. Получаем $3 = 2^3 + C$, $C = -5$; $y = x^3 - 5$.

272. $x'(t) = \sin t \cos t = \frac{1}{2} \sin 2t$, поэтому $x(t) = -\frac{1}{4} \cos 2t + c$.

$3 = -0,25 \cos \frac{\pi}{2} + c$, откуда $c = 3$; $x(t) = -0,25 \cos 2t + 3$.

25. Интеграл

273. а) $\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \cos(1,5\pi + 0,5x) dx = 2 \sin(1,5\pi + 0,5x) \Big|_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} =$

$$= 2 \sin(1,5\pi + \frac{3\pi}{4}) - 2 \sin(1,5\pi + \frac{\pi}{2}) = -2 \cos \frac{3\pi}{4} - 2 \sin 2\pi = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 = \sqrt{2};$$

б) $\int_1^2 (x^{-2} + x^2) dx = \left(-\frac{1}{x} + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^2 = -\frac{1}{2} + \frac{8}{3} + 1 - \frac{1}{3} = \frac{17}{6} = 2\frac{5}{6};$

$$\begin{aligned} \text{в)} \quad & \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} (\cos 3x - \sin 2x) dx = \left(\frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{2} \cos 2x \right) \bigg|_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} = \\ & = \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi}{6} + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \sin \left(\frac{3\pi}{12} \right) - \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{7}{12} - \frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{г)} \quad & \int_{-5}^{-2} (5 - 6x - x^2) dx = \left(5x - 3x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \bigg|_{-5}^{-2} = -10 - 12 + \frac{8}{3} - \left(-25 - 75 + \frac{125}{3} \right) = \\ & -22 + \frac{8}{3} + 100 - \frac{125}{3} = 78 - 39 = 39. \end{aligned}$$

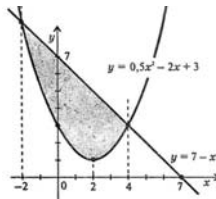
$$274. \text{ а)} \quad \int_0^a \cos \frac{x}{2} dx = 2 \sin \frac{x}{2} \bigg|_0^a = 2 \sin \frac{a}{2} - 2 \sin 0 = 2 \sin \frac{a}{2};$$

- 1) наибольшее значение: 2 при $a = \pi + 4\pi n$ – интеграл равен 2,
- 2) наименьшее значение: -2 при $a = -\pi + 4\pi n$ – интеграл равен -2.

$$\begin{aligned} \text{б)} \quad & \int_0^{a+\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x \bigg|_0^{a+\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} (\sin 2(a + \frac{\pi}{2}) - \sin 2 \cdot 0) = \\ & = \frac{1}{2} \sin(\pi + 2a) = -\frac{1}{2} \sin 2a; \end{aligned}$$

- 1) наибольшее значение: $\frac{1}{2}$; $a = -\frac{\pi}{4} + \pi n$;
- 2) наименьшее значение: $-\frac{1}{2}$; $a = \frac{\pi}{4} + \pi n$.

275. а)



Пределы интегрирования:

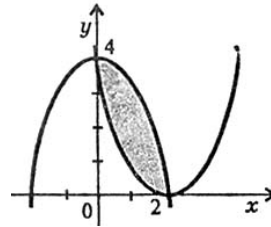
$$0,5x^2 - 2x + 3 = 7 - x, \quad 0,5x^2 - 2x + 3 + x - 7 = 0, \quad x^2 - 2x - 8 = 0, \quad x_1 = -2, \quad x_2 = 4;$$

$$S = \int_{-2}^4 (7-x)dx - \int_{-2}^4 (0,5x^2 - 2x + 3) = \left(7x - \frac{x^2}{2}\right)_{-2}^4 - \left(\frac{x^3}{6} - x^2 + 3x\right)_{-2}^4 =$$

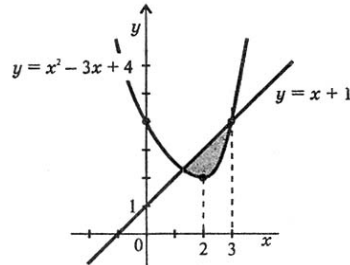
$$= 28 - 8 + 14 + 2 - \left(\frac{64}{6} - 16 + 12 + \frac{8}{6} - 4 + 6\right) = 10;$$

$$\text{б) } S = \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)_{0}^2 - \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x\right)_{0}^2 =$$

$$= 8 - \frac{8}{3} - \left(\frac{8}{3} - 8 + 8\right) = 8 - \frac{16}{3} = 2\frac{2}{3};$$



в) Пределы интегрирования:

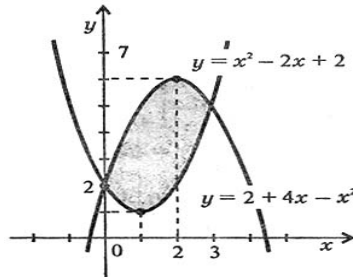


$$x^2 - 3x + 4 = x + 1, \quad x^2 - 4x + 3 = 0, \quad x_1 = 3, \quad x_2 = 1;$$

$$S = \int_1^3 (x+1)dx - \int_1^3 (x^2 - 3x + 4)dx = \left(\frac{x^2}{2} + x\right)_{1}^3 - \left(\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + 4x\right)_{1}^3 =$$

$$= \frac{9}{2} + 3 - \frac{1}{2} - 1 - \left(9 - \frac{27}{2} + 12 - \frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 4\right) = 6 - 4\frac{2}{3} = 1\frac{1}{3};$$

г) Пределы интегрирования:

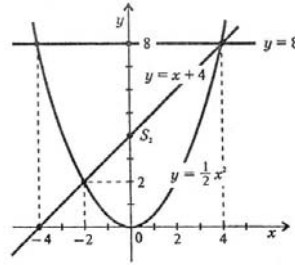


$$x^2 - 2x + 2 = 2 + 4x - x^2, \quad 2x^2 - 6x = 0, \quad 2x(x-3) = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 3;$$

$$S = \int_0^3 (2+4x-x^2)dx - \int_0^3 (x^2-2x+2)dx = \left(2x+2x^2-\frac{x^3}{3}\right)_0^3 - \left(\frac{x^3}{3}-x^2+2x\right)_0^3 =$$

$$= 6+18-9-(9-9+6) = 15-6 = 9. \quad \text{Ответ: } S = 9.$$

276.



$$S_1 = \int_{-4}^4 8dx - \int_{-2}^4 (x+4)dx = 8x \Big|_{-4}^4 - \left(\frac{x^2}{2} + 4x\right) \Big|_{-2}^4 =$$

$$= 32 + 32 - (8 + 16 - 2 + 8) = 64 - 30 = 34;$$

$$S_2 = \int_{-2}^4 (x+4)dx - \int_{-2}^4 \frac{1}{2}x^2 dx = 30 - \left(\frac{x^3}{6}\right) \Big|_{-2}^4 = 30 - \left(\frac{64}{6} + \frac{8}{6}\right) = 30 - 12 = 18;$$

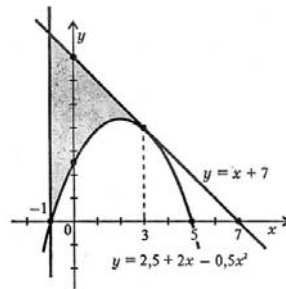
$$S_3 = \int_{-4}^{-2} \frac{1}{2}x^2 dx = \frac{x^3}{6} \Big|_{-4}^{-2} = -\frac{8}{6} + \frac{64}{6} = \frac{56}{6} = 9\frac{1}{3};$$

$$S_{\text{части}} = 34 - 9\frac{1}{3} = 24\frac{2}{3}, \quad S_{\text{Пчасти}} = 18.$$

277. Уравнение касательной:

$$y' = 2 - x,$$

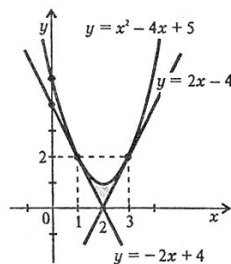
$$y'(3) = -1, \quad y(3) = 4, \quad y = -1(x-3) + 4 = -x + 7.$$



$$\begin{aligned}
 S &= \int_{-1}^3 (-x+7)dx - \int_{-1}^3 (2,5+2x-0,5x^2)dx = \left(-\frac{x^2}{2}+7x\right)\Big|_{-1}^3 - \\
 &- \left(2,5x+x^2-\frac{x^3}{6}\right)\Big|_{-1}^3 - \frac{9}{2}+21+\frac{1}{2}+7 - \left(7,5+9-\frac{9}{2}+2,5-1-\frac{1}{6}\right) = \\
 &= 24-13\frac{5}{6} = 10\frac{1}{6} \text{ (кв.ед.)}.
 \end{aligned}$$

278. Уравнения касательных:

$$y'(x) = 2x - 4, \quad y'(1) = -2, \quad y(1) = 2, \quad y_1 = -2(x-1) + 2 = -2x + 2 + 2 = -2x + 4;$$

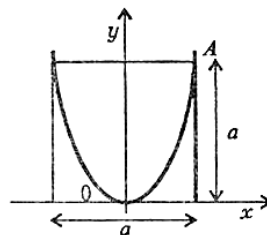


$$\begin{aligned}
 S &= \int_1^3 (x^2 - 4x + 5)dx - \int_1^2 (2x + 4)dx - \int_2^3 (2x - 4)dx = \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 5x\right)\Big|_1^3 - \\
 &- (-x^2 + 4x)\Big|_1^2 - (x^2 + 4x)\Big|_2^3 = 9 - 18 + 15 - \frac{1}{3} + 2 - 5 - (-4 + 8 + 1 - 4) - \\
 &- (9 - 12 - 4 + 8) = 2\frac{2}{3} - 1 - 1 = \frac{2}{3}.
 \end{aligned}$$

279.

Введем систему координат так, что вершина параболы проходит через точку $(0; 0)$, и уравнение параболы

$$y = kx^2, \quad k = \frac{4}{a}; \quad y = \frac{4 \cdot x^2}{a};$$

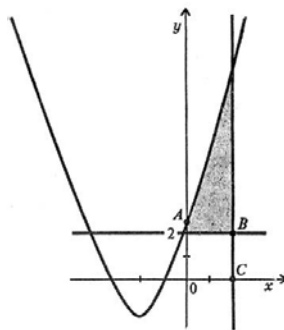


$$S_1 = 2 \int_0^{a/2} \frac{4}{a} x^2 dx = \frac{8}{a} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^{a/2} = \frac{8}{a} \cdot \frac{a^3}{8 \cdot 3} = \frac{a^2}{3};$$

$$S_2 = a^2 - \frac{a^2}{3};$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{a^2}{3} \cdot \frac{3}{2a^2} = \frac{1}{2}.$$

280.



$$S = \int_0^2 (x^2 + 4x + a) dx - S_{OABC} = \left(\frac{x^3}{3} + 2x^2 + ax \right) \Big|_0^2 - 4 =$$

$$= \frac{8}{3} + 8 + 2a - 4 = 2a + \frac{20}{3}, \text{ значит, } 2a + \frac{20}{3} = 12, \text{ поэтому } a = \frac{8}{3}.$$

281.

$$f'(x) = a \cdot \pi \cos \pi x,$$

$$\int_0^2 (a \sin \pi x + b) dx = \left(-\frac{a}{\pi} \cos \pi x + bx \right) \Big|_0^2 = -\frac{a}{\pi} \cdot 1 + 2b + \frac{a}{\pi} = 2b.$$

$$f'(2) = 2, \quad 2 = a\pi \cos 2\pi, \quad 2 = a\pi, \quad a = \frac{2}{\pi}.$$

$$\int_0^2 f(x) dx = 4, \quad 2b = 4, \quad b = 2. \quad \text{Ответ: } a = \frac{2}{\pi}, \quad b = 2.$$